Equazioni paraboliche astratte — Discretizzazione in tempo

1. Il problema continuo. Sia (V, H, V') una terna hilbertiana e si denotino con $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ e $\|\cdot\|_*$ le norme nei tre spazi rispettivi, con $((\cdot,\cdot))$ e $(\cdot,\cdot)$ i prodotti scalari di V e di H e con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la dualità fra V' e V. Si denoti inoltre con c_* una costante tale che

$$|v| \le c_*\|v\| \quad \forall\, v \in V \qquad \text{e} \qquad \|v\|_* \le c_*|v| \quad \forall\, v \in H.$$

Si consideri infine l'operatore $A : V \to V'$ lineare e continuo associato a una forma bilinare a su $V \times V$ verificante la seguenti ipotesi di continuità e di coercività debole: esistono $M \ge 0$, $\alpha > 0$ e $\lambda \ge 0$ tali che

$$|a(v,v)| \le M\|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V \tag{1}$$

$$a(v,v) \ge \alpha\|v\|^2 - \lambda|v|^2 \qquad \forall\, v \in V. \tag{2}$$

Fissato $T > 0$ e assegnati

$$f \in L^2(0,T;V') \qquad \text{e} \qquad u_0 \in H, \tag{3}$$

si cerca u tale che

$$u \in L^2(0,T;V), \qquad u' + Au = f \quad \text{in } \mathcal{D}'(0,T;V') \qquad \text{e} \qquad u(0) = u_0. \tag{4}$$

Si noti che da $u \in L^2(0,T;V)$ segue $Au \in L^2(0,T;V')$, per cui anche $u \in H^1(0,T;V')$. Dunque $u \in C^0([0,T];V')$ e la condizione di Cauchy ha senso.

Nel seguito lo stesso simbolo c denota costanti che possono essere diverse fra loro e che dipendono al più da c_*, M, α, λ e T. Il simbolo C denota invece costanti che possono dipendere, in aggiunta, dalle norme di u_0 e di f negli spazi H e $L^2(0,T;V')$ rispettivamente.

2. Il problema discreto. Fissiamo un numero naturale N, che potremo eventualmente supporre abbastanza grande, e poniamo $\tau = T/N$. Il problema discretizzato che consideriamo è il seguente. Dato

$$(f_0, \dots, f_{N-1}) \in (V')^N \tag{5}$$

si cerca $(u_1, \dots, u_N) \in V^N$ tale che

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + Au_{n+1} = f_n \qquad \text{per } n = 0, \dots, N-1 \tag{6}$$

Osserviamo subito che, almeno per τ abbastanza piccolo, cioè per N abbastanza grande, il problema (6) ha una e una sola soluzione. Infatti esso si riscrive

$$a_\tau(u_{n+1}, v) = (u_n, v) + \tau\langle f_n, v\rangle \qquad \forall\, v \in V$$

ove la forma a_τ è data dalla formula

$$a_\tau(u,v) = (u,v) + \tau a(u,v).$$

Allora a_τ è bilineare e continua e verifica

$$a_\tau(v,v) \ge \tau\alpha\|v\|^2 + (1-\tau\lambda)|v|^2.$$

Quindi essa è $V-$ ellittica se $\tau\lambda \le 1$. Supponiamo dunque $\tau\lambda \le 1$.

3. Preliminari. Per arrivare a stime a priori utili osserviamo che vale la formula

$$2b(u-v,u) = b(u-v,u-v) + b(u,u) - b(v,v) \qquad \forall\, u,v \in W \tag{7}$$

ove W è uno spazio di Hilbert e b è una forma bilineare simmetrica su $W \times W$. Basta infatti sviluppare i due membri per vedere che la (7) è vera. Notiamo che (7) vale, in particolare, se W è uno degli spazi V o H e b è il corrispondente prodotto scalare. La (7) vale inoltre nel caso $W = V$ e $b = a$ se a è anche simmetrica.

Utilizzeremo inoltre i due lemmi che seguono, il primo dei quali è una versione discreta del ben noto Lemma di Gronwall.

Lemma 1. *Siano $\beta,\gamma \ge 0$ assegnati e sia $(c_0,\dots,c_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che*

$$c_{n+1} \le \beta + \gamma \sum_{k=1}^{n} c_k \qquad \text{per } n = 0,\dots,N-1. \tag{8}$$

Allora

$$c_n \le \beta(1+\gamma)^{n-1} \qquad \text{per } n = 1,\dots,N. \tag{9}$$

Dimostrazione. La tesi è ovvia se $n = 1$, come si vede prendendo $n = 0$ nella (8). Procedendo per induzione, sia $m < N$ e supponiamo che la formula da dimostrare valga per $n = 1,\dots,m$. Usando l'ipotesi abbiamo allora

$$c_{m+1} \le \beta + \gamma \sum_{n=1}^{m} \beta(1+\gamma)^{n-1} = \beta + \beta\gamma\,\frac{(1+\gamma)^m - 1}{(1+\gamma)-1} = \beta(1+\gamma)^m.$$

Lemma 2. *Siano W uno spazio di Hilbert e $\{W_n\}$ una successione di sottospazi chiusi di W tale che ogni sua sottosuccessione $\{W_{n_k}\}$ abbia unione densa in W. Sia inoltre $w \in W$ e, per ogni n, sia w_n la proiezione di w su W_n. Allora la successione $\{w_n\}$ converge a w.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che da ogni sottosuccessione estratta da $\{w_n\}$ si può estrarre ulteriormente una sottosuccessione convergente a w. Sia dunque $\{w_{n_k}\}$ una sottosuccessione di $\{w_n\}$. Per ipotesi, considerata la sottosuccessione $\{W_{n_k}\}$ e detta U_1 la sua unione, U_1 è densa in W. Esiste dunque $z_1 \in U_1$ tale che

$$\|w - z_1\| \le 1$$

e risulta $z_1 \in W_{n_{k_1}}$ per un certo indice k_1. Applicato lo stesso discorso alla sottosuccessione $\{W_{n_k}\}_{k>k_1}$ e detta U_2 l'unione corrispondente, troviamo $z_2 \in U_2$ tale che

$$\|w - z_2\| \le 1/2$$

e risulta $z_2 \in W_{n_{k_2}}$ per un certo indice $k_2 > k_1$. Procedendo in tal modo si costruiscono una successione $\{z_i\}$ di elementi di W e una successione di indici $\{k_i\}$ strettamente crescente tali che

$$z_i \in W_{n_{k_i}} \qquad \text{e} \qquad \|w - z_i\| \le 1/i \qquad \forall\, i.$$

Siccome, per definizione di proiezione, per ogni i vale la disuguaglianza

$$\|w - w_{n_{k_i}}\| \le \|w - z_i\|$$

abbiamo costruito la sottosuccessione desiderata e la dimostrazione è conclusa.

4. Stime a priori. Scriviamo (6) con $n = k$, testiamo con u_{k+1} e sommiamo rispetto a k da 0 al generico $n < N$, ottenendo

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k, u_{k+1}) + \tau \sum_{k=0}^{n} a(u_{k+1}, u_{k+1}) = \tau \sum_{k=0}^{n} \langle f_k, u_{k+1} \rangle$$

per $n = 0, \ldots, N-1$. Applicando ora (7) al prodotto scalare di H, la (2) e disuguaglianze elementari deduciamo

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} |u_{k+1} - u_k|^2 + |u_{n+1}|^2 - |u_0|^2 + 2\tau\alpha \sum_{k=0}^{n} \|u_{k+1}\|^2 - 2\tau\lambda \sum_{k=0}^{n} |u_{k+1}|^2 \\ &\qquad \le 2\tau \sum_{k=0}^{n} \langle f_k, u_{k+1} \rangle \le \tau\alpha \sum_{k=0}^{n} \|u_{k+1}\|^2 + \frac{\tau}{\alpha} \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_*^2 \end{aligned}$$

da cui subito

$$\sum_{k=0}^{n} |u_{k+1} - u_k|^2 + |u_{n+1}|^2 + \tau\alpha \sum_{k=0}^{n} \|u_{k+1}\|^2 \le D + 2\tau\lambda \sum_{k=0}^{n} |u_{k+1}|^2 \tag{10}$$

ove abbiamo posto per comodità

$$D = |u_0|^2 + \frac{\tau}{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \|f_k\|_*^2 .$$

Se supponiamo $2\tau\lambda \le 1/2$, deduciamo

$$\sum_{k=0}^{n} |u_{k+1} - u_k|^2 + \frac{1}{2}|u_{n+1}|^2 + \tau\alpha \sum_{k=0}^{n} \|u_{k+1}\|^2 \le D + 2\tau\lambda \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2$$

cioè

$$s_{n+1} \le D + 2\tau\lambda \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2$$

con la notazione

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|^2 + \frac{1}{2}|u_n|^2 + \tau\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \|u_{k+1}\|^2.$$

Maggiorando ulteriormente il secondo membro troviamo

$$s_{n+1} \le D + 4\tau\lambda \sum_{k=1}^{n} s_k$$

e, applicando il Lemma 1, otteniamo

$$s_n \le D(1+4\tau\lambda)^{n-1} \qquad \text{per} \ \ n = 1, \ldots, N.$$

A maggior ragione abbiamo allora

$$s_n \le D(1+4\tau\lambda)^N = D(1+4\tau\lambda)^{T/\tau} \qquad \text{per} \ \ n = 0, \ldots, N.$$

Siccome la funzione $x \mapsto (1+4\lambda x)^{T/x}$ è limitata in $(0,\infty)$, concludiamo

$$s_n \le cD \le c \left(|u_0|^2 + \tau \sum_{k=0}^{N-1} \|f_k\|_*^2 \right)$$

per $n = 1, \ldots, N$. Ciò significa la stima a priori

$$\sum_{k=0}^{n} |u_{k+1} - u_k|^2 + |u_{n+1}|^2 + \tau \sum_{k=0}^{n} \|u_{k+1}\|^2 \le c \left(|u_0|^2 + \tau \sum_{k=0}^{N-1} \|f_k\|_*^2 \right) \tag{11}$$

che vale per $n = 0, \ldots, N-1$.

5. Funzioni interpolanti. Ora interpretiamo la (11) in termini di funzioni interpolanti i valori u_n. Introduciamo l'interpolata costante a tratti $\overline{u} \in L^2(0,T;V)$ e l'interpolata lineare a tratti $\widehat{u} \in C^0([0,T];V)$ definite quasi ovunque dalle formule

$$\begin{aligned} \overline{u}((n+\vartheta)\tau) &= u_{n+1} && \text{per} \ \ 0 < \vartheta < 1, && n = 0, \ldots, N-1, \\ \widehat{u}((n+\vartheta)\tau) &= u_n + \vartheta(u_{n+1} - u_n) && \text{per} \ \ 0 < \vartheta < 1, && n = 0, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

Essendo

$$\max_{0 \le t \le T} |\widehat{u}(t)|^2 = \max_{0 \le n \le N} |u_n|^2 \qquad \text{e} \qquad \int_0^T \|\overline{u}(t)\|^2 \, dt = \tau \sum_{n=1}^{N} \|u_n\|^2$$

la (11) implica subito

$$\max_{0 \le t \le T} |\widehat{u}(t)|^2 + \int_0^T \|\overline{u}(t)\|^2 \, dt \le c \left(|u_0|^2 + \tau \sum_{k=0}^{N-1} \|f_k\|_*^2 \right). \tag{12}$$

Ora sfruttiamo la stima del primo termine della (11). Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^T |\overline{u}(t)-\widehat{u}(t)|^2\,dt &= \tau\sum_{n=0}^{N-1}\int_0^1 |\overline{u}((n+\vartheta)\tau)-\widehat{u}((n+\vartheta)\tau)|^2\,d\vartheta \\ &= \tau\sum_{n=0}^{N-1}\int_0^1 (1-\vartheta)^2|u_{n+1}-u_n|^2\,d\vartheta = \frac{\tau}{3}\sum_{n=0}^{N-1}|u_{n+1}-u_n|^2.\end{aligned}$$

La (11) fornisce allora

$$\int_0^T |\overline{u}(t)-\widehat{u}(t)|^2\,dt \le c\tau\left(|u_0|^2+\tau\sum_{k=0}^{N-1}\|f_k\|_*^2\right). \tag{13}$$

6. Discretizzazione dei dati. Riprendiamo il problema continuo (4) e scegliamo i dati del problema discreto (6). Lasciamo u_0 come dato iniziale e come f_n prendiamo

$$f_n = \frac{1}{\tau}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} f(t)\,dt, \qquad n=0,\dots,N-1. \tag{14}$$

Benché sia $\tau = T/N$ e ora intendiamo lasciar variare N, non appesantiamo le notazioni e continuiamo a denotare con τ il valore T/N. Evidenziamo invece la dipendenza da N nei simboli delle funzioni interpolanti. Denotiamo dunque con $\overline{u}_N$ e $\widehat{u}_N$ le funzioni $\overline{u}$ e $\widehat{u}$ costruite al passo precedente e definiamo in aggiunta la funzione f_N^* mediante la formula

$$f_N^*((n+\vartheta)\tau) = f_n \quad \text{per } \ 0<\vartheta<1, \qquad n=0,\dots,N-1. \tag{15}$$

Notiamo che f_N^* è la proiezione di f, nella metrica di $L^2(0,T;V')$, sul sottospazio

$$\mathcal{S}_N(V') = \left\{v\in L^2(0,T;V'):\ v|_{(n\tau,(n+1)\tau)} = \text{costante} \ \text{ per } n=0,\dots,N-1\right\} \tag{16}$$

costituito dalle funzioni a scala con punti di suddivisione $n\tau$, $n=0,\dots,N$. Infatti $\mathcal{S}_N(V')$ è un sottospazio chiuso di $L^2(0,T;V')$, la funzione f_N^* appartiene a $\mathcal{S}_N(V')$ e la differenza $f-f_N^*$ è ortogonale a $\mathcal{S}_N(V')$ in $L^2(0,T;V')$ come si verifica immediatamente. Abbiamo perciò

$$\tau\sum_{n=0}^{N-1}\|f_n\|_*^2 = \int_0^T \|f_N^*(t)\|_*^2\,dt \le \int_0^T \|f(t)\|_*^2\,dt \tag{17}$$

Le stime a priori (12) e (13) forniscono allora

$$\|\widehat{u}_N\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|\overline{u}_N\|_{L^2(0,T;V)} \le C. \tag{18}$$

$$\|\overline{u}_N-\widehat{u}_N\|_{L^2(0,T;H)} \le C\tau^{1/2}. \tag{19}$$

7. Sottosuccessioni convergenti. Dalla (18) deduciamo che

$$\widehat{u}_N \overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad \text{in } \ L^\infty(0,T;H) \tag{20}$$

$$\overline{u}_N \rightharpoonup z \qquad \text{in } \ L^2(0,T;V) \tag{21}$$

per opportune funzioni limite appartenenti agli spazi considerati e almeno per una sottosuccessione estratta $\{N_k\}$. D'altra parte, la (19) implica

$$\overline{u}_N - \widehat{u}_N \to 0 \qquad \text{in } \ L^2(0,T;H)$$

per cui $z = u$ e la (21) diventa

$$\overline{u}_N \rightharpoonup u \qquad \text{in } \ L^2(0,T;V). \tag{22}$$

8. Passaggio al limite. Dimostriamo infine che la funzione u data dal passo precedente risolve il problema continuo (4). Sappiamo già che la prima condizione è soddisfatta. Per ricavare la seconda osserviamo che la (6) si riscrive

$$\widehat{u}_N' + A\overline{u}_N = f_N^* \quad \text{in } \ (0,T) \tag{23}$$

e dimostriamo che possiamo passare al limite in ciascuno dei tre termini e ottenere il termine corrispondente di (4). Per correttezza consideriamo solo le sottosuccessioni estratte al passo precedente, ma un risultato di unicità per la soluzione di (4) garantisce che, di fatto, le intere successioni convergono a u.

Dalla (20) deduciamo che $\widehat{u}_N \to u$ in $\mathcal{D}'(0,T;V')$. Abbiamo dunque

$$\widehat{u}_N' \to u' \qquad \text{in } \ \mathcal{D}'(0,T;V').$$

Dalla (22), usando anche la continuità di A da V in V', otteniamo

$$A\overline{u}_N \rightharpoonup Au \qquad \text{in } \ L^2(0,T;V').$$

Per concludere la verifica dell'equazione in (4), basta allora dimostrare che

$$f_N^* \to f \qquad \text{in } \ L^2(0,T;V').$$

Per far questo è sufficiente applicare il Lemma 2 a $L^2(0,T;V')$ e alla successione dei sottospazi (16). Infatti f_N^* è, come abbiamo osservato, la proiezione di f su $\mathcal{S}_N(V')$ e l'ipotesi di densità che compare nel lemma è conseguenza dal fatto seguente, di facile controllo: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che in ciascuno degli spazi $\mathcal{S}_N(V')$ con $T/N \le \delta$ troviamo una g tale che $\|f - g\|_{L^2(0,T;V')} \le \varepsilon$.

Per ottenere la condizione di Cauchy di (4) dimostriamo una convergenza più significativa della successione $\{\widehat{u}_N\}$. Riscrivendo la (23) nella forma

$$\widehat{u}_N' = f_N^* - A\overline{u}_N$$

vediamo che la successione $\{\widehat{u}_N'\}$, come quella dei secondi membri, converge debolmente in $L^2(0,T;V')$. Siccome il suo limite debole è $f - Au$, cioè u', tenendo conto della (20) vediamo che

$$\widehat{u}_N \rightharpoonup u \qquad \text{in } \ H^1(0,T;V'). \tag{24}$$

Siccome $H^1(0,T;V')$ è incluso in $C^0([0,T];V')$ con immersione continua, deduciamo che

$$\widehat{u}_N(0) \rightharpoonup u(0) \qquad \text{in } V'.$$

Siccome $\widehat{u}_N(0) = u_0$ per ogni N, concludiamo.

9. Ulteriore regolarità. Dimostriamo ora che, se la forma a è anche simmetrica e se valgono le condizioni

$$f \in L^2(0,T;H) \qquad \text{e} \qquad u_0 \in V, \tag{25}$$

allora la soluzione u costruita sopra verifica

$$u \in H^1(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;W) \tag{26}$$

ove W è lo spazio

$$W = \{v \in V : \ Av \in H\} \tag{27}$$

munito della norma del grafico.

Per far questo riprendiamo il problema discreto (6) e troviamo un'ulteriore stima a priori. Le notazioni sono le stesse del passo 4.

Scriviamo (6) con $n = k$, testiamo con $u_{k+1} - u_k$ e applichiamo la (7) alla forma simmetrica a. Sommando rispetto a k, otteniamo per $n = 0, \ldots, N-1$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{n} |u_{k+1} - u_k|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a(u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - u_k) + \frac{1}{2} a(u_{n+1}, u_{n+1}) \\ &\qquad = \frac{1}{2} a(u_0, u_0) + \sum_{k=0}^{n} (f_k, u_{k+1} - u_k). \end{aligned}$$

Usando (2) e disuguaglianze elementari abbiamo allora

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{n} |u_{k+1} - u_k|^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{n} \|u_{k+1} - u_k\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|u_{n+1}\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} a(u_0, u_0) + \frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 + \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{\lambda}{2} \right) \sum_{k=0}^{n} |u_{k+1} - u_k|^2 + \frac{\lambda}{2} |u_{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Nell'ipotesi $2\tau\lambda \leq 1$, che equivale a $\lambda/2 \leq 1/(4\tau)$, assorbiamo la seconda sommatoria del secondo membro nella prima del primo e per stimare l'ultimo termine possiamo usare la (11). Otteniamo allora immediatamente

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{n} |u_{k+1} - u_k|^2 + \|u_{n+1}\|^2 \leq c \left(\|u_0\|^2 + \tau \sum_{k=0}^{N-1} |f_k|^2 \right). \tag{28}$$

A questo punto possiamo riprendere il discorso del passo 6 e dei successivi. La (28) fornisce

$$\|\widehat{u}_N'\|_{L^2(0,T;H)} + \|\widehat{u}_N\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq c \Big(\|u_0\| + \|f\|_{L^2(0,T;H)} \Big). \tag{29}$$

Dunque, a meno di estrazioni di sottosuccessioni, concludiamo che $\{\widehat{u}'_N\}$ e $\{\widehat{u}_N\}$ convergono debolmente in $L^2(0,T;H)$ e debolmente* in $L^\infty(0,T;V)$ rispettivamente. Siccome i limiti deboli non possono essere che u' e u, concludiamo che valgono le prime due affermazioni della (26). Ma l'ultima viene di conseguenza, dato che $Au = f - u'$.

10. Osservazione. Nelle ipotesi (3), la stima (18) passa al limite per semicontinuità inferiore. Inoltre l'equazione in (4) fornisce di conseguenza una stima per u'. La stessa cosa avviene poi, nelle ipotesi aggiuntive fatte, per la (29), dalla quale pure si trae una conseguenza su Au sfruttando l'equazione (4). Allora, rispettivamente nelle ipotesi (3) e (25) sui dati u_0 e f, per la soluzione u che abbiamo costruito abbiamo esattamente le stime formali che si ottengono testando la (4) con u e con u', cioè

$$\|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u\|_{C^0([0,T];H)} + \|u\|_{H^1(0,T;V')} \le c\Bigl(|u_0| + \|f\|_{L^2(0,T;V')}\Bigr) \tag{30}$$

$$\|u\|_{L^2(0,T;W)} + \|u\|_{C^0([0,T];V)} + \|u\|_{H^1(0,T;H)} \le c\Bigl(\|u_0\| + \|f\|_{L^2(0,T;H)}\Bigr) \tag{31}$$

la (30) nelle sole ipotesi (1) e (2) sulla forma bilineare a e la (31) nell'ipotesi aggiuntiva che a sia anche simmetrica.