Equazioni iperboliche astratte: un risultato di esistenza

1. Il problema. Nell'ambito della terna hilbertiana (V, H, V') con V separabile, dimostriamo un risultato di esistenza della soluzione del problema di Cauchy

$$u''(t) + Au(t) = f(t) \qquad \text{q.o. in } (0,T) \tag{1}$$

$$u(0) = u^0, \qquad u'(0) = u^1 \tag{2}$$

ove $A : V \to V'$ è lineare, continuo, simmetrico e $V-$ ellittico. Nel seguito, α e M denotano la costante di $V-$ ellitticità e la norma dell'operatore A. Supponiamo

$$f = f_1 + f_2 \qquad \text{con} \qquad f_1 \in L^2(0,T;H) \quad \text{e} \quad f_2 \in H^1(0,T;V') \tag{3}$$

$$u^0 \in V \qquad \text{e} \qquad u^1 \in H \tag{4}$$

(nei problemi concreti f_1 e f_2 corrispondono a integrali di volume e di bordo rispettivamente) e cerchiamo la soluzione u verificante le condizioni di regolarità

$$u \in C^0([0,T];V), \qquad u' \in C^0([0,T];H) \qquad \text{e} \qquad u'' \in L^2(0,T;V'). \tag{5}$$

Come al solito le derivate sono intese nel senso delle distribuzioni a valori in V'. In particolare la (1) significa semplicemente che $f - Au$ è la derivata di u' nel senso detto.

Ricordiamo che, nelle ipotesi fatte sui dati, il problema considerato ha al più una soluzione verificante le (5) e che per questa vale la stima di dipendenza continua

$$\|u\|^2_{C^0([0,T];V)} + \|u'\|^2_{C^0([0,T];H)} \le c\left(\|u^0\|^2 + |u^1|^2 + \|f_1\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|f_2\|^2_{H^1(0,T;V')}\right) \tag{6}$$

ove c dipende solo da α, M e T.

Notiamo che il problema di Cauchy (1) e (2) ha senso in condizioni di regolarità anche minore. Ad esempio, se $f \in L^2(0,T;V')$, $u \in L^2(0,T;V')$ e $u' \in L^2(0,T;V')$, si ha $f - Au \in L^2(0,T;V')$ e ha senso richiedere che u risolva l'equazione (1) nel senso delle distribuzioni a valori in V'. In tali condizioni deduciamo poi $u \in H^2(0,T;V')$, da cui $u \in C^1([0,T];V')$, e ha senso imporre anche le (2). Dunque possiamo anche cercare soluzioni meno regolari del problema proposto.

2. Il metodo di Galerkin. Dimostriamo dapprima, nelle ipotesi (3) e (4), l'esistenza di una soluzione u verificante le condizioni di regolarità più deboli

$$u \in L^\infty(0,T;V), \qquad u' \in L^\infty(0,T;H) \qquad \text{e} \qquad u'' \in L^2(0,T;V') \tag{7}$$

e per far questo usiamo il metodo di Faedo–Galerkin, che richiede tre passi.

Il primo di questi consiste nella costruzione e nella risoluzione di un problema approssimato, ottenuto essenzialmente dal problema dato con la sostituzione di V con un suo sottospazio di dimensione finita. Sia $\{V_n\}$ una successione non decrescente di sottospazi di V tale che ciascuno dei V_n abbia dimensione finita e l'unione V_∞ della famiglia sia densa in V. Scegliamo poi due successioni $\{u_n^0\}$ e $\{u_n^1\}$ tali che $u_n^0, u_n^1 \in V_n$ per ogni n, convergenti a u^0 in V e a u^1 in H rispettivamente e tali che (ad esempio)

$$\|u_n^0\| \le \|u^0\| \qquad \text{e} \qquad |u_n^1| \le |u^1| \qquad \forall\, n. \tag{8}$$

Ecco una possibile costruzione dei dati del problema approssimato. Prendiamo come u_n^0 e come u_n^1 le proiezioni ortogonali di u^0 e di u^1 su V_n (che è chiuso in V e in H in quanto ha dimensione finita) rispetto ai prodotti scalari di V e di H rispettivamente. Allora le condizioni dette sono soddisfatte grazie alle proprietà delle proiezioni e alla densità di V_∞ in V e, di conseguenza, in H.

Fissiamo ora n e consideriamo il problema di trovare $u_n \in H^2(0,T;V_n)$ tale che

$$\langle u_n''(t), v\rangle + \langle Au_n(t), v\rangle = \langle f(t), v\rangle \qquad \forall\, v \in V_n \qquad \text{q.o. in } (0,T) \tag{9}$$

$$u_n(0) = u_n^0, \qquad u_n'(0) = u_n^1. \tag{10}$$

Per vedere che tale problema ha una e una sola soluzione, basta scrivere la (9) in termini di una base $(w_1, \ldots, w_m)$ di V_n, ove $m = \dim V_n$. Detta y_i la $i-$ esima componente di u_n ripetto alla base considerata, la (9) si riscrive nella forma

$$\sum_{j=1}^m b_{ij}\, y_j''(t) + \sum_{j=1}^m a_{ij}\, y_j(t) = f_i(t), \qquad i = 1, \ldots, m$$

ove abbiamo posto

$$b_{ij} = \langle w_j, w_i\rangle = (w_j, w_i), \qquad a_{ij} = \langle Aw_j, w_i\rangle \qquad \text{e} \qquad f_i(t) = \langle f(t), w_i\rangle.$$

La (9) consiste dunque in un sistema di m equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine, sistema che è riconducibile alla forma normale in quanto la matrice (b_{ij}) è invertibile data l'indipendenza dei w_i. Dalla stima $|f_i(t)| \le \|f(t)\|_* \|w_i\|$ vediamo inoltre che $f_i \in L^2(0,T)$ per ogni i. Siccome le (10) si traducono immediatamente in condizioni di Cauchy per le y_i, concludiamo che il problema approssimato ha una e una sola soluzione con la regolarità voluta.

Il secondo passo consiste nella deduzione corretta e non solo formale di stime a priori. Per far questo scegliamo $v = u_n'(t)$ nella (9) e integriamo sul generico intervallo $(0,t)$ con $0 < t \le T$. Abbiamo

$$\begin{aligned} &\int_0^t \langle u_n''(s), u_n'(s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle Au_n(s), u_n'(s)\rangle\, ds \\ &= \int_0^t \langle f_1(s), u_n'(s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle f_2(s), u_n'(s)\rangle\, ds \end{aligned} \tag{11}$$

e possiamo dedurre una stima trasformando, maggiorando e minorando i vari integrali. Si noti che la regolarità è sufficiente perché i calcoli siano giustificati. Abbiamo

$$\int_0^t \langle u_n''(s), u_n'(s)\rangle\, ds = \frac{1}{2}|u_n'(t)|^2 - \frac{1}{2}|u_n^1|^2$$

$$\int_0^t \langle Au_n(s), u_n'(s)\rangle\, ds = \frac{1}{2}\langle Au_n(t), u_n(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle Au_n^0, u_n^0\rangle \geq \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 - \frac{M}{2}\|u_n^0\|^2$$

$$\int_0^t \langle f_1(s), u_n'(s)\rangle\, ds = \int_0^t (f_1(s), u_n'(s))\, ds \leq \frac{1}{2}\int_0^T |f_1(s)|^2\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t |u_n'(s)|^2\, ds$$

$$\int_0^t \langle f_2(s), u_n'(s)\rangle\, ds = -\int_0^t \langle f_2'(s), u_n(s)\rangle\, ds + \langle f_2(t), u_n(t)\rangle - \langle f_2(0), u_n^0\rangle$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^T \|f_2'(s)\|_*^2\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_n(s)\|^2\, ds + \frac{\alpha}{4}\|u_n(t)\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|f_2(t)\|_*^2 + \frac{1}{2}\|u_n^0\|^2 + \frac{1}{2}\|f_2(0)\|_*^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\|f_2\|_{H^1(0,T;V')}^2\; ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_n(s)\|^2\, ds + \frac{\alpha}{4}\|u_n(t)\|^2$$

$$+\frac{1}{2}\|u_n^0\|^2 + \Big(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\Big)\,\|f_2\|_{C^0([0,T];V')}^2 .$$

Ora la stima $\|f_2\|_{C^0([0,T];V')} \leq c\,\|f_2\|_{H^1(0,T;V')}$, ove c dipende solo da T, consente di sostituire la norma di f_2 in $C^0([0,T];V')$ nell'ultima disuguaglianza. D'altra parte possiamo usare le (8) e sostanzialmente sostituire le norme $\|u^0\|$ e $|u^1|$ alle norme dei dati approssimanti. Combinando allora tutto ciò con la (11), otteniamo per ogni t

$$\begin{aligned}&\|u_n(t)\|^2 + |u_n'(t)|^2\\ &\leq c\Big(\|u^0\|^2 + |u^1|^2 + \|f_1\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|f_2\|_{H^1(0,T;V')}^2\Big)\\ &\quad + c\int_0^t \big(\|u_n(s)\|^2 + |u_n'(s)|^2\big)\, ds\end{aligned}$$

con una nuova c che dipende solo da α, M e T e il Lemma di Gronwall fornisce (con una nuova costante che dipende solo dagli stessi tre parametri)

$$\begin{aligned}&\|u_n(t)\|^2 + |u_n'(t)|^2\\ &\leq c\Big(\|u^0\|^2 + |u^1|^2 + \|f_1\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|f_2\|_{H^1(0,T;V')}^2\Big)\end{aligned}$$

ove la nuova c dipende solo da α, M e T. Dall'arbitrarietà di t deduciamo

$$\begin{aligned}&\|u_n\|_{L^\infty(0,T;V)}^2 + \|u_n'\|_{L^\infty(0,T;H)}^2\\ &\leq c\Big(\|u^0\|^2 + |u^1|^2 + \|f_1\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|f_2\|_{H^1(0,T;V')}^2\Big). \qquad (12)\end{aligned}$$

Nell'ultimo passo estraiamo sottosuccessioni convergenti e passiamo al limite. Dalla stima a priori (12) deduciamo

$$\begin{aligned} u_n &\overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad \text{in } L^\infty(0,T;V)\\ u_n' &\overset{*}{\rightharpoonup} w \qquad \text{in } L^\infty(0,T;H)\end{aligned}$$

per certe $u \in L^\infty(0,T;V)$ e $w \in L^\infty(0,T;H)$ e almeno per certi indici estratti (ma non vogliamo appesantire le notazioni). Dimostriamo che u risolve il problema (1) e (2) nella versione più debole (7). Dato che $w = u'$ come si vede subito, le prime due delle (7) sono automaticamente soddisfatte. Abbiamo inoltre

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad H^1(0,T;H) \qquad \text{da cui} \qquad u_n \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad C^0([0,T];H)$$

e quindi anche

$$u_n(0) \rightharpoonup u(0) \qquad \text{in} \quad H$$

dato che, per ogni $z \in H$ fissato, il funzionale

$$v \mapsto (v(0), z)$$

è lineare e continuo su $C^0([0,T];H)$. Ricordando che $u_n(0) = u_n^0$ e che $u_n^0 \to u^0$ in H, deduciamo che $u(0) = u^0$, cioè la prima delle (2).

Per dimostrare che u verifica la (1) (che implica l'ultima delle (7)) e la seconda delle (2), osserviamo che la convergenza debole* di $\{u_n\}$ in $L^\infty(0,T;V)$ e il fatto che A è lineare e continuo da V in V' implicano

$$Au_n \overset{*}{\rightharpoonup} Au \qquad \text{in} \quad L^\infty(0,T;V').$$

Fissiamo ora m ad arbitrio e, per $n \geq m$, prendiamo $z \in V_m$ e $\varphi \in C^1([0,T])$ nulla in T. Ricordato che $V_m \subseteq V_n$ possiamo scegliere $v = z\varphi'(t)$ nella (9), sommare su $(0,T)$ e integrare per parti una volta. Usando la seconda delle (10) otteniamo

$$\int_0^T \langle f(t) - Au_n(t), z\varphi(t) \rangle \, dt = -\int_0^T \langle u_n'(t), z\varphi'(t) \rangle \, dt - \langle u_n^1, z\varphi(0) \rangle.$$

Siccome $n \geq m$ è arbitrario possiamo passare al limite usando le convergenze deboli* e l'ipotesi $u_n^1 \to u^1$ in H e dedurre

$$\int_0^T \langle f(t) - Au(t), z\varphi(t) \rangle \, dt = -\int_0^T \langle u'(t), z\varphi'(t) \rangle \, dt - \langle u^1, z\varphi(0) \rangle. \tag{13}$$

Questa equazione vale dunque per ogni $\varphi \in C^1([0,T])$ nulla in T e per ogni z appartenente a uno dei V_m, cioè per ogni z dell'unione V_∞. Se poi $z \in V$, scelta una successione $\{z_k\}$ di elementi di V_∞ convergente a z in V e passando al limite, vediamo immediatamente che la (13) vale anche per ogni $z \in V$. In particolare, per ogni $z \in V$ e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, abbiamo

$$\int_0^T \langle f(t) - Au(t), z\varphi(t) \rangle \, dt = -\int_0^T \langle u'(t), z\varphi'(t) \rangle \, dt$$

per cui $f - Au$ è la derivata di u' nel senso delle distribuzioni a valori in V' e la (1) è completamente dimostrata. In particolare $u'' \in H^2(0,T;V')$ e anche l'ultima delle (7) è provata. Riprendendo ora la (13) con $\varphi \in C^1([0,T])$ nulla in T, tenendo conto dell'ulteriore regolarità osservata per u e integrando per parti, otteniamo

$$\int_0^T \langle f(t) - Au(t), z\varphi(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle u''(t), z\varphi'(t)\rangle \, dt + \langle u'(0) - u^1, z\varphi(0)\rangle$$

e utilizzando la (1) oramai stabilita deduciamo

$$\langle u'(0) - u^1, z\varphi(0)\rangle$$

per ogni $z \in V$ e per ogni φ nelle condizioni dette. Scegliendo ad esempio $\varphi(t) = T - t$, vediamo immediatamente che vale la seconda delle (2) e la dimostrazione dell'esistenza di una soluzione verificante le (7) nelle condizioni (3) e (4) è conclusa.

3. Un risultato intermedio. Ora dimostriamo l'esistenza di una soluzione verificante le (5), ma in ipotesi restrittive sui dati. Sono più che sufficienti le seguenti

$$u^0, u^1 \in V, \qquad Au^0 \in H \qquad \text{e} \qquad f \in H^1(0,T;H). \tag{14}$$

Consideriamo infatti il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &w''(t) + Aw(t) = f'(t) \qquad \text{q.o. in } (0,T) \\ &w(0) = u^1, \qquad w'(0) = f(0) - Au^0. \end{aligned}$$

Siccome $f' \in L^2(0,T;H)$, $u^1 \in V$ e $f(0) - Au^0 \in H$, i dati sono nelle ipotesi (3) e (4) e, per la prima parte della dimostrazione, il problema considerato ha almeno una soluzione w verificante le (7), cioè

$$w \in L^\infty(0,T;V), \qquad w' \in L^\infty(0,T;H) \qquad \text{e} \qquad w'' \in L^2(0,T;V').$$

Consideriamo allora la funzione

$$u(t) = u^0 + \int_0^t w(s)\, ds, \qquad t \in [0,T]$$

e dimostriamo che essa è la soluzione di (1) e (2) nelle condizioni (5). Innanzi tutto le (5) sono banalmente soddisfatte e vale la prima delle (2). Inoltre $u' = w$ e anche la seconda delle (2) segue. Per quasi ogni $t \in (0,T)$ abbiamo poi

$$\begin{aligned} u''(t) + Au(t) &= w'(t) + Au^0 + \int_0^t Aw(s)\, ds \\ &= w'(0) + \int_0^t w''(s)\, ds + Au^0 + \int_0^t Aw(s)\, ds \\ &= w'(0) + Au^0 + \int_0^t \bigl(w''(s) + Aw(s)\bigr)\, ds = f(0) + \int_0^t f'(s)\, ds = f(t). \end{aligned}$$

Dunque u è la soluzione cercata.

4. Il risultato di esistenza. Dimostriamo infine che, nelle ipotesi (3) e (4), esiste una soluzione del problema (1) e (2) verificante le (5). Costruiamo successioni di dati approssimanti u_n^0, u_n^1, f_n^1 e f_n^2 nelle condizioni precedenti di maggior regolarità e convergenti, nelle norme corrette, ai dati del problema da risolvere, cioè

$$\begin{array}{rcll} f_n^1 \in H^1(0,T;H) \quad \forall n & \text{e} & f_n^1 \to f_1 & \text{in } L^2(0,T;H) \\ f_n^2 \in H^1(0,T;H) \quad \forall n & \text{e} & f_n^2 \to f_2 & \text{in } H^1(0,T;V') \\ u_n^0 \in V, \quad Au_n^0 \in H \quad \forall n & \text{e} & u_n^0 \to u^0 & \text{in } V \\ u_n^1 \in V \quad \forall n & \text{e} & u_n^1 \to u^1 & \text{in } H. \end{array}$$

Per costruire i dati iniziali u_n^0 e u_n^1 basta risolvere in V il problema $V-$ ellittico

$$w_n + \frac{1}{n} A w_n = w$$

con $w = u^0$ e $w = u^1$ rispettivamente. Lo stesso problema con $w = f_n^2(t)$ fornisce una scelta possibile per $f_n^2(t)$. Per quanto riguarda invece f_n^1, basta una regolarizzazione di f_1 in tempo, e ciò può essere fatto per prolungamento e convoluzione.

Consideriamo ora il problema di Cauchy (1) e (2) relativamente ai dati approssimati e denotiamo con u_n la sua (unica) soluzione verificante le condizioni di regolarità (5). Questa esiste per il passo precedente. Ricordato che la stima (6) vale nelle ipotesi (3), (4) e (5) su dati e soluzione e applicatala alle differenze $u_n - u_m$, otteniamo

$$\begin{aligned} &\|u_n - u_m\|^2_{C^0([0,T];V)} + \|u_n' - u_m'\|^2_{C^0([0,T];H)} \\ &\leq c\left(\|u_n^0 - u_m^0\|^2 + |u_n^1 - u_m^1|^2 + \left\|f_n^1 - f_m^1\right\|^2_{L^2(0,T;H)} + \left\|f_n^2 - f_m^2\right\|^2_{H^1(0,T;V')} \right) \end{aligned}$$

e dalle convergenze dei dati approssimanti deduciamo che le successioni $\{u_n\}$ e $\{u_n'\}$ sono di Cauchy in $C^0([0,T];V)$ e in $C^0([0,T];H)$ rispettivamente. Dunque esse convergono in tali spazi e, chiaramente, il limite della seconda è la derivata del limite della prima. Abbiamo dunque trovato u verificante le (5) tale che

$$u_n \to u \quad \text{in } C^0([0,T];V) \qquad \text{e} \qquad u_n' \to u' \quad \text{in } C^0([0,T];H).$$

Seguono immediatamente le (2) e, con metodi oramai abituali, verifichiamo la (1). Sia $v \in \mathcal{D}(0,T;V)$. Allora abbiamo

$$\int_0^T \langle f_n^1(t) + f_n^2(t) - Au_n(t), v(t)\rangle \, dt = -\int_0^T \langle u_n'(t), v'(t)\rangle \, dt$$

e passando al limite otteniamo

$$\int_0^T \langle f_1(t) + f_2(t) - Au(t), v(t)\rangle \, dt = -\int_0^T \langle u'(t), v'(t)\rangle \, dt$$

cioè la (1) nel senso delle distribuzioni a valori in V'.