Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 14 Giugno 2001

1. Posto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 2\}$, trovare un esempio di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua in tutto Ω e di un cammino chiuso γ (con sostegno $\gamma^* \subset \Omega$) tali che

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 3 .$$

La funzione f che avete indicato è olomorfa?

2. Dati un sottoinsieme misurabile Ω di $\mathbb{R}^n$ ed una funzione misurabile $\omega : \Omega \to \mathbb{R}$, diciamo che ω è *non negativa* se $\omega(x) \geq 0$ q.o. in Ω. Dato p con $1 < p < +\infty$, ed indicato con p' l'*esponente coniugato* di p:

i) se $\omega \in L^p(\Omega)$ è tale che

$$\int_\Omega \omega(x)\, v(x)\, dx \geq 0 \quad \forall v \in L^{p'}(\Omega) \ \textit{non negativa}\,,$$

provare che ω è non negativa;

ii) sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni misurabili e non negative su Ω. Se $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in L^p, provare che u è non negativa.

iii) La proprietà espressa in *ii)* è ancora vera se alla convergenza debole in L^p si sostituisce la convergenza in misura?

3. Siano H uno spazio di Hilbert, e $T : H \to H$ un operatore lineare tale che

$$i) \ \ (Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in H\,;$$

$$ii) \ \ \exists c > 0 : \ \ \|Tx\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in H\,.$$

Utilizzando il teorema del grafico chiuso, provare che T è continuo. Dimostrare inoltre che T è iniettivo, e che $T(H)$ è densa e chiusa in H. Concludere che T^{-1} è continuo.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 14 Giugno 2001 - soluzioni

1. Ovviamente, se una tale f esiste, *non* può essere olomorfa (altrimenti, per il teorema di CAUCHY, si avrebbe $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ per *ogni* cammino chiuso con sostegno $\subset \Omega$). Un esempio che verifica le condizioni richieste: $f(z) := -\frac{3i}{\pi}\operatorname{Re} z$, $\gamma(\theta) := \exp(i\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$. È ovvio che f è continua in Ω, ed inoltre risulta

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} -\frac{3i}{\pi}\cos\theta \exp(i\theta)\, i\, d\theta =$$

$$\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\exp(i\theta)+\exp(-i\theta)}{2}\exp(i\theta)\,d\theta =$$

$$\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\exp(2i\theta)+1)\,d\theta = \frac{3}{2\pi}2\pi = 3\,.$$

2. *i)* Per assurdo, supponiamo che, posto $E := \{x \in \Omega : \ \omega(x) < 0\}$, sia $\mu(E) > 0$. Allora dovrebbe esistere un insieme misurabile $\widetilde{E} \subset E$ tale che $0 < \mu(\widetilde{E}) < +\infty$. Posto $v := \chi_{\widetilde{E}}$, si ha che $v \in L^{p'}(\Omega)$, $v \geq 0$ q.o. in Ω, ed inoltre

$$\int_\Omega \omega(x)\,v(x)\,dx = \int_{\widetilde{E}} \omega(x)\,dx < 0\,,$$

che contraddice l'ipotesi.

ii) Dalle ipotesi, si ha che, $\forall v \in L^{p'}(\Omega)$, se v è non negativa, allora $0 \leq \int_\Omega u_n(x)\,v(x)\,dx \to \int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx$, da cui la tesi, grazie al punto *i)*.

iii) Sì, perchè la convergenza in misura implica la convergenza q.o. per una sottosuccessione.

3. Mostriamo che $G(T)$ è *chiuso*: per il teorema del grafico chiuso, questo implica che T è continuo. In effetti, se $\{x_n\} \subset H$ è tale che $x_n \to x$ e $Tx_n \to y$, risulta, $\forall z \in H$, $(x_n, Tz) = (Tx_n, z)$, da cui, al limite, $(x, Tz) = (Tx, z) = (y, z)$, quindi, per l'arbitrarietà di z, $y = Tx$.
L'iniettività di T è conseguenza ovvia della *ii)*.
Densità di $T(H)$: sia $y \in H$ tale che $(y, Tx) = (Ty, x) = 0 \ \ \forall x \in H$: allora $Ty = 0$, quindi, per l'iniettività, $y = 0$.
Chiusura di $T(H)$: se $\{x_n\}$ è tale che $Tx_n \to y$, $\{Tx_n\}$ è di CAUCHY; ma allora, grazie alla *ii)* ed alla linearità di T, lo è anche $\{x_n\}$. Quindi, $\exists x$: $x_n \to x$, e, per la continuità di T, $Tx_n \to Tx = y$ per l'unicità del limite. Poichè $T : H \to H$ è lineare, continuo e biiettivo, ne viene che anche T^{-1} è continuo.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 17 Luglio 2001

1. Dati $a, b \in \mathbb{C}$ con $|a| > 1$, $|b| < 1$, sia $f(z) := (z-a)^{-1}(z-b)^{-3}$, per $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$.

i) Determinare le singolarità di f, e classificarle;

ii) calcolarne i residui nei punti singolari;

iii) calcolare $\int_\Gamma f(z)\,dz$, dove $\Gamma := \{z \in \mathbb{C}: \ z = \exp(i\theta) \text{ con } 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

2. f è una funzione da $[0,1]$ in $\mathbb{R}$; si discuta la validità delle seguenti affermazioni:

i) se f è derivabile $\forall x \in [0,1]$, ed inoltre verifica

$$(a) \qquad \exists L > 0: \quad |f(x) - f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x, y \in [0,1]\,,$$

allora f è assolutamente continua;

ii) se f è assolutamente continua, allora vale la (a).

3. Posto $H := L^2(0,1)$, con prodotto scalare $(f, g) := \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$, si indichi con P_K l'*operatore di proiezione* sul sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto K di H.

i) Dimostrare che, se

$$K := \{v \in H: \quad v(x) \ge 0 \ \text{ q.o. } in \ [0,1]\}\,,$$

allora $\forall f \in H$ si ha $P_K f = f^+$ (dove $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$).

ii) Determinare la forma esplicita di $(P_K f)(x)$ quando

$$K := \{v \in H: \ \exists a \ge 0 \ \textit{tale che} \ v(x) = a \ \text{ q.o. } in \ [0,1]\}\,.$$

iii) Determinare la forma esplicita di $(P_K f)(x)$ quando

$$K := \{v \in H: \ \exists a \in \mathbb{R} \ \textit{tale che} \ v(x) = ax \ \text{q.o. } in \ [0,1]\}\,.$$

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 17 Luglio 2001 - soluzioni

1. *i)* a è un polo di ordine 1, mentre b è un polo di ordine 3. Quindi,

ii)
$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a} f(z)\,(z-a) = (a-b)^{-3}\,,$$

$$\mathrm{Res}(f,b) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to b}\frac{d^2}{dz^2}\left(f(z)\,(z-b)^3\right) = (b-a)^{-3}\,.$$

iii) Per il teorema dei residui, essendo $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0$ e $\mathrm{Ind}_\Gamma(b) = 1$, si ha

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,b)\,.1 = 2\pi i\,(b-a)^{-3}\,.$$

2. *i)* Vera: la (a) *da sola* implica l'assoluta continuità (la derivabilità in ogni punto *è del tutto superflua*).
ii) Falsa: ad esempio, $f(x) := \sqrt{x}$ è assolutamente continua su $[0,1]$ (perchè verifica la formula fondamentale del calcolo integrale), ma la (a) *non vale*, cioè la funzione $x \mapsto \sqrt{x}$ *non è lipschitziana* per $x \geq 0$: fissato comunque $L \geq 0$, se $y = 0$ la (a) diventa $\sqrt{x} \leq Lx$, che è *falsa* $\forall x > 0$ se $L = 0$, e per $0 < x < L^{-2}$ se $L > 0$.

3. *i)* $\forall f \in H$, si ha che $f^+ \in K$ (ovvio), e $(f - f^+, v - f^+)_H \leq 0 \;\; \forall v \in K$ (il che mostra che $f^+ = P_K f$). Infatti, se $v \in K$ si ha

$$\int_0^1 (f - f^+)(x)\,(v - f^+)(x)\,dx = \int_{\{f>0\}} 0\,dx + \int_{\{f\leq 0\}} f(x)\,v(x)\,dx \leq 0\,.$$

ii) Si ha $(P_K f)(x) = a \geq 0$ q.o. in $[0,1]$ se e solo se, $\forall b \geq 0$, risulta $(f(x) - a, b - a) = (b-a)\left(\int_0^1 f(x)\,dx - a\right) \leq 0$. Se $\int_0^1 f(x)\,dx < 0$, la condizione erquivale a $b - a \geq 0 \;\forall b \geq 0$, cioè ad $a = 0$; se $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 0$, scegliendo $b := \int_0^1 f(x)\,dx$ si ottiene che $a = \int_0^1 f(x)\,dx$. Si conclude che $(P_K f)(x) = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^+$ (la verifica diretta è immediata).

iii) Si osservi intanto che K è un *sottospazio* di H. Data $f \in H$, cerchiamo $a \in \mathbb{R}$ tale che $P_K f(x) = ax$ q.o. in $[0,1]$, cioè $(f(x) - ax, bx) = 0 \;\forall b \in \mathbb{R}$. Poichè si ha $\int_0^1 (f(x) - ax)(bx)\,dx = b\int_0^1 (x\,f(x) - ax^2)\,dx = 0 \;\;\forall b \in \mathbb{R}$ se e solo se $\int_0^1 x\,f(x)\,dx = a\int_0^1 x^2\,dx = \frac{a}{3}$, ne viene, di conseguenza, che $(P_K f)(x) = 3x \;\int_0^1 x\,f(x)\,dx$.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 21 Settembre 2001

1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^k$. Provare che, se $v,\ \omega,\ v_n \in L^3(\Omega)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, e

(a) $v_n \to v$ q.o. rispetto alla misura di LEBESGUE in Ω,

(b) $v_n \to \omega$ nella topologia forte di $L^3(\Omega)$,

allora $\omega = v$. Si può inoltre concludere che

(c) $v_n \to v$ nella topologia forte di $L^1(\Omega)$?

2. Dato $r > 0$, sia γ un cammino chiuso, percorso una sola volta in senso antiorario, il cui sostegno γ^* è la circonferenza di centro l'origine e raggio r. Verificare se la serie

$$\sum_{n=-5}^{+\infty} \int_\gamma z^n \exp\left(\frac{2}{z}\right)\, dz$$

è convergente; in caso affermativo, calcolarne la somma.

3. Dimostrare che, se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di uno spazio di BANACH E (con norma $\|\cdot\|$) tale che la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|$ converge, allora anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge in E.

Sapendo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge in E, si può dedurre che anche la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|$ è convergente?

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 21 Settembre 2001 - soluzioni

1. Da *(b)* si deduce che $\{v_n\}$ ha una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ che converge ad ω in Ω q.o. (per la misura di LEBESGUE); per *(a)*, $\{v_{n_k}\}$ converge q.o. a v, dunque, per l'unicità del limite, $\omega = v$. Poichè non è detto che Ω sia limitato, dalle ipotesi *(a)* e *(b)* *non* si può dedurre *(c)* (anzi, *non si può nemmeno concludere che* $v \in L^1(\Omega)$: ad esempio, sia $\Omega := [1, +\infty[$, e si ponga, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n(x) := v(x) := x^{-2/3}$. Allora, *(a)* e *(b)* sono verificate, ma $v \notin L^1(\Omega)$).

2. La funzione $\exp(2/z)$ ha una *sola* singolarità (essenziale) per $z = 0$; in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, risulta $\exp(2/z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{2}{z}\right)^k$, cosicchè lo sviluppo in serie di LAURENT della funzione $f(z) := z^n \exp(2/z)$ è

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}\,\frac{1}{z^{k-n}}\,.$$

Ne viene che

$$c_{-1} = \begin{cases} \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} & \text{se } n \geq -1 \\ 0 & \text{se } n < -1\ . \end{cases}$$

Per il teorema dei residui, si ha che $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0)\operatorname{Ind}_\gamma(0) = 2\pi i\, c_{-1}$, quindi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \begin{cases} 2\pi i\,\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} & \text{se } n \geq -1\,, \\ 0 & \text{se } n < -1\,. \end{cases}$$

Di conseguenza,

$$\sum_{n=-5}^{+\infty} \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = 2\pi i \exp(2)\,.$$

3. Per ipotesi, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n, m > n_0$ con $n \geq m$ si ha $\sum_{k=m}^{n} \|u_k\| \leq \varepsilon$; quindi $\|\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{m} u_k\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} u_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|u_k\| \leq \varepsilon$, e questo comporta che $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ converge in E (la successione delle sue somme parziali è di CAUCHY, ed E è completo).
Non vale l'implicazione opposta (basta assumere $E = \mathbb{R}$, $u_n = (-1)^n/n$).

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 23 Novembre 2001

1. E, F sono due spazi di BANACH, e Λ è un operatore in $\mathcal{L}(E; F)$. Posto $G := \Lambda(E)$, e definendo $\Lambda^* : F' \to E'$ nel modo seguente: ${}_{E'}\langle \Lambda^* f^*, e\rangle_E := {}_{F'}\langle f^*, \Lambda e\rangle_F$ $(\forall e \in E,\ \forall f^* \in F')$, verificare che

(a) $\Lambda^* \in \mathcal{L}(F'; E')$, e $\|\Lambda^*\|_{\mathcal{L}(F';E')} \leq \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(E;F)}$;

(b) $\ker \Lambda^* = \{f^* \in F' \mid {}_{F'}\langle f^*, g\rangle_F = 0 \ \ \forall g \in G\}$;

(c) $\Lambda^*(F') \subset \{e^* \in E' \mid {}_{E'}\langle e^*, e\rangle_E = 0 \ \ \forall e \in \ker \Lambda\}$.

2. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ lo spazio mensurale definito come segue: $\Omega = [-1, 1]$; $\mathcal{M} := \mathcal{P}(\Omega)$; $\mu := \delta_0$, dove, $\forall M \in \mathcal{M}$, $\delta_0(M) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in M, \\ 0 & \text{se } 0 \notin M. \end{cases}$

Si ponga $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$

Di ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa, motivando le risposte:

(a) f è continua q.o. in Ω;

(b) $\exists g$ continua in Ω tale che $f = g$ q.o. in Ω;

(c) $\exists M \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(M) = 0$ ed f è continua in $\Omega \setminus M$.

3. Siano:

$A := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \leq 2\}$,

$B := \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } z = \lambda\left(1 + \frac{3}{2} i\right)\right\}$,

$D := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \cdot \mathrm{Im}\, z = 6 \ \text{ e } \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$,

$E := A \cup (B \cap D)$.

Scrivere la parametrizzazione di un cammino chiuso γ, con $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 1$, che contenga al suo interno l'insieme E, ed il cui sostegno γ^* *non* sia una circonferenza.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 23 Novembre 2001 - soluzioni

1. *(a)*: la linearità di Λ^* è ovvia; poichè poi, $\forall e \in E$ e $\forall f^* \in F'$, risulta

$$|_{E'}\langle \Lambda^* f^*, e\rangle_E| = |_{F'}\langle f^*, \Lambda e\rangle_F| \leq \|f^*\|_{F'} \cdot \|\Lambda e\|_F \leq \|f^*\|_{F'} \cdot \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot \|e\|_E ,$$

ne segue che

$$\|\Lambda^* f^*\|_{E'} = \sup_{\substack{e\in E \\ \|e\|_E=1}} |_{E'}\langle \Lambda^* f^*, e\rangle_E| \leq \|f^*\|_{F'} \cdot \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(E,F)} ,$$

quindi

$$\|\Lambda^*\|_{\mathcal{L}(F',E')} = \sup_{\substack{f^*\in F' \\ \|f^*\|_{F'}=1}} \|\Lambda^* f^*\|_{E'} \leq \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(E,F)} .$$

(b): $f^* \in \ker \Lambda^*$ se e solo se $\langle \Lambda^* f^*, e\rangle = 0 \quad \forall e \in E$, quindi se e solo se $\langle f^*, \Lambda e\rangle = 0 \quad \forall e \in E$, cioè se e solo se $\langle f^*, g\rangle = 0 \quad \forall g \in G$.

(c): se $e^* \in \Lambda^*(F')$, allora $\exists f^* \in F' \,:\, e^* = \Lambda^* f^*$; quindi, $\forall e \in \ker \Lambda$, si ha $_{E'}\langle e^*, e\rangle_E =_{E'} \langle \Lambda^* f^*, e\rangle_E =_{F'} \langle f^*, \Lambda e\rangle_F = 0$, da cui l'inclusione cercata.

2. *(a)*: <u>falsa</u>: f non è continua nel punto $x = 0$, che ha misura 1;

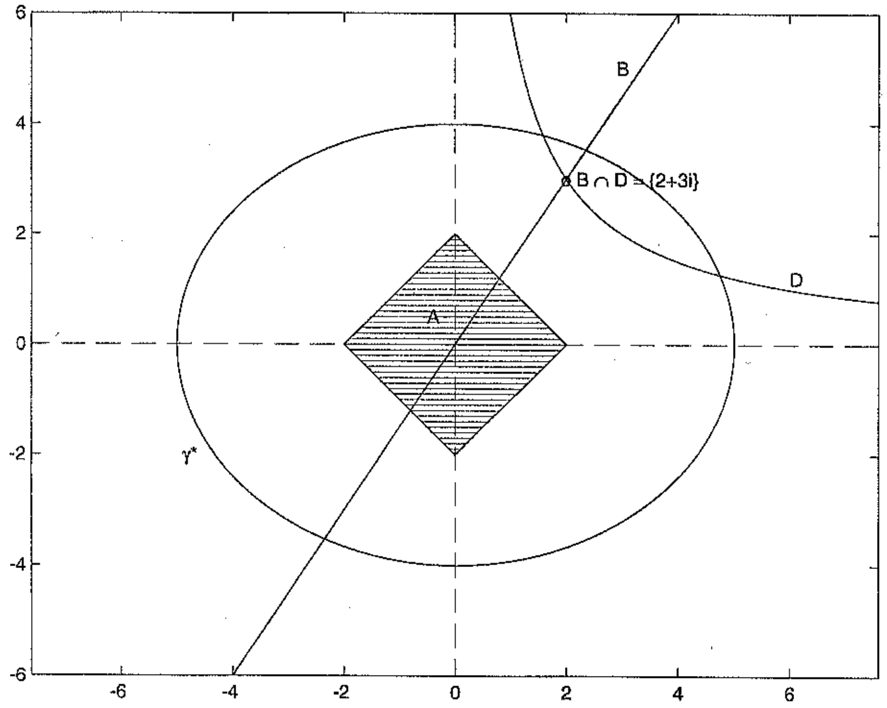
(b): <u>vera</u>: basta prendere come g la funzione identicamente nulla su Ω; g è costante (quindi continua), e differisce da f solo in $M := \,]0,1]$, che ha misura nulla;

(c): <u>vera</u>: se M è l'insieme (di misura nulla) definito nel punto precedente, la restrizione di f ad $\Omega \setminus M = [-1,0]$ è identicamente nulla (oppure, basta osservare che *(b)*$\Longrightarrow$*(c)*).

3. <u>*Ad esempio*</u>, si può scegliere come γ l'ellisse il cui sostegno γ^* è dato da

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{(\operatorname{Im} z)^2}{16} + \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{25} = 1 \right\},$$

percorso una sola volta in senso antiorario; *una possibile* parametrizzazione di γ è la seguente: $z(t) = x(t) + iy(t)$, dove $x(t) := 5\cos t$, $y(t) := 4 \sin t$ $(t \in [0, 2\pi])$.



Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 25 Gennaio 2002

1. Posto

$$X := \left\{ f \in L^2(0,+\infty) \ : \ f(x) = \frac{1}{x} \ \text{q.o. } in \ (1,+\infty) \right\} \ ,$$

i) provare che X è un convesso contenuto in $L^2(0,+\infty)$;
ii) dire se X è un sottospazio di $L^2(0,+\infty)$;
iii) dire se X è chiuso.

2. Data una successione $\{u_n\}$ in $L^\infty(\mathbb{R})$, sapendo soltanto che $\{u_n\}$ è limitata, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte:
i) esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che $\displaystyle\int_0^x u_{n_k}(\xi)\, d\xi$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$;
ii) esistono $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ ed un insieme di misura nulla $N \subset \mathbb{R}$ tali che $u_{n_k} \to u$ uniformemente in $\mathbb{R} \setminus N$.

3. La funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) := \dfrac{1}{z^2}$ è sviluppabile in serie di TAYLOR in un intorno del punto $z_0 = 2$? Se la risposta è affermativa, determinare tale sviluppo, precisandone *l'insieme* di convergenza.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 25 Gennaio 2002 - soluzioni

1. *i)* se $f_1, f_2 \in X$ e $t \in [0,1]$, si ha, q.o. in $[1,+\infty[$, $tf_1(x)+(1-t)f_2(x) = \frac{t}{x} + \frac{1-t}{x} = \frac{1}{x}$;
ii): la risposta è *negativa*: se $f \in X$ certamente $2f \notin X$;
iii): la risposta è *affermativa*. Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni in X che converge ad f in $L^2(0,+\infty)$, risulta

$$0 \leq \left\| \frac{1}{x} - f(x) \right\|_{L^2(1,+\infty)} = \|f_n(x)-f(x)\|_{L^2(1,+\infty)} \leq \|f_n(x)-f(x)\|_{L^2(0,+\infty)} \longrightarrow 0\,,$$

quindi $f(x) \in X$.

2. *(a)*: <u>vera</u>: detta $\chi_x(\xi)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[0,x]$ se $x > 0$, dell'intervallo $[x,0]$ se $x < 0$, si ha che $\chi_x \in L^1(\mathbb{R})$; poichè da $\{u_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ che converge nella topologia debole* $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$, ne viene il risultato cercato, dato che $\int_0^x u_{n_k}(\xi)\, d\xi = \langle u_{n_k}, \chi_x \rangle$.
(b): <u>falsa</u>: la successione $\{u_n\}$, dove u_n è la funzione caratteristica dell'intervallo $[n, n+1]$, è limitata in $L^\infty(\mathbb{R})$ ($\|u_n\| = 1\ \forall n$), ma per $m \neq n$ si ha che $\|u_n - u_m\| = 1$; ciò esclude che una *qualunque* sottosuccessione possa essere di CAUCHY rispetto alla convergenza uniforme in $\mathbb{R} \setminus N$, *comunque* si scelga l'insieme N di misura nulla.

3. La funzione è sviluppabile in serie di TAYLOR nel cerchio dato da $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 2\}$, perchè in tale cerchio è olomorfa. Per determinare i coefficienti della sua serie di TAYLOR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$, basta ricordare che $\forall n = 0,1,2,\dots$ si ha $a_n = \dfrac{f^{(n)}(2)}{n!}$. Si dimostra facilmente per induzione che $f^{(n)}(z) = (-1)^n \dfrac{(n+1)!}{z^{n+2}}$, cosicchè $a_n = (-1)^n \dfrac{(n+1)!}{n!\, 2^{n+2}} = (-1)^n \dfrac{(n+1)}{2^{n+2}}$.
Quindi, per $|z-2| < 2$ risulta

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^{n+2}} (z-2)^n,$$

e l'insieme di convergenza *contiene* il cerchio aperto di centro $z_0 = 2$ e raggio 2. Per quanto riguarda il comportamento della serie sulla circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2\}$, posto $z(\theta) := 2 + 2\exp(i\theta)$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$, si ha

$$f(z(\theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} 2^n \exp(in\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4} \exp(in\theta):$$

il termine generale di tale serie *non è infinitesimo* per nessun $\theta \in [0, 2\pi[$: la serie non converge in nessun punto della circonferenza di convergenza.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 22 Marzo 2002

1. Caratterizzare le funzioni f, olomorfe in $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, che hanno in i un polo di ordine 4, con $\mathrm{Res}(f, i) = -2$.

2. Esiste una funzione $f : [3, 5] \to \mathbb{R}$ a variazione limitata e non continua? Motivare adeguatamente la risposta.

3. In ℓ^∞, si consideri l'insieme A dei vettori con componenti definitivamente nulle:

$$A := \{x := \{x_n\} \in \ell^\infty \ : \ \exists n^* = n^*(x) : \ x_n = 0 \ \forall n > n^*\}.$$

Dimostrare che, nella topologia *<u>forte</u>* di ℓ^∞,

i) A <u>non</u> è chiuso;

ii) A <u>non</u> è denso.

Gli stessi risultati valgono anche se si munisce ℓ^∞ della topologia *debole* $\sigma(\ell^\infty, (\ell^\infty)')$?

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 22 Marzo 2002 - soluzioni

1. Le funzioni descritte sono tutte e sole quelle della forma

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{k=1}^{4} \frac{c_{-k}}{(z-i)^k},$$

con le condizioni seguenti:

f_1 è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$; $\qquad c_{-1} = -2$; $\qquad c_{-4} \neq 0$.

2. La risposta è affermativa: ad esempio,

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } 3 \leq x \leq 4, \\ 1 & \text{se } 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

(è monotona, quindi a variazione limitata, ma discontinua per $x = 4$.)

3. *i)* Il vettore $x := \{x_n\}$ con $x_n := \frac{1}{n}$ non è in A, ma è in $\overline{A}$. In effetti, posto, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} := \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, 0, \ldots\right\}$, si ha che

$$\lim_{k\to+\infty} \|x - x^{(k)}\| = \lim_{k\to+\infty} \left(\sup_{n>k} |x_n|\right) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0\,.$$

ii) Il vettore y le cui componenti sono tutte uguali ad uno *non può essere approssimato con elementi di* A: in effetti, $\forall x \in A$ risulta

$$\|y - x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n - x_n| \geq \sup_{n>n^*(x)} |1 - x_n| = 1\,,$$

quindi $y \notin \overline{A}$.

I risultati *i)* e *ii)* valgono anche se ℓ^∞ è munito della topologia debole: A è una varietà lineare, in particolare un convesso, quindi la sua chiusura è la stessa nelle topologie forte e debole.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 10 Giugno 2002

1. Posto, per ogni $r > 0$ fissato, $D_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni, ciascuna delle quali è olomorfa in D_2.

Dimostrare che se la restrizione $f_n|_{\partial D_1}$ di f_n a ∂D_1 tende ad una funzione φ in $L^1(\partial D_1)$, allora esiste una funzione f, olomorfa in D_1, tale che $f_n(z)$ tende a $f(z)$ $\forall z \in D_1$.

2. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$, misurabili, tali che $|f_n(x)| \leq 5$ *q.o.* in Ω, e tali inoltre che $f_n \to f$ in misura (la misura è quella di LEBESGUE). Provare che

$$\forall p \text{ con } 1 \leq p < +\infty, \quad f_n \to f \quad \text{in } L^p(\Omega)\,.$$

3. Siano: E lo spazio di BANACH $C^0([0,1])$ (con l'usuale norma $\|x\|_E = \max_{0\leq t\leq 1} |x(t)|$); $K := \{k \in E \mid k(0) = 0\}$; per ogni $x \in E$, $d(x,K) := \inf_{k\in K} \|x-k\|$.

i) Verificare che K è un sottospazio chiuso di E;

ii) provare che $d(x,K) = |x(0)|$, $\forall x \in E$;

iii) discutere la validità di ciascuna delle seguenti affermazioni:

iii₁) $\forall x \in E$, $\exists k \in K :\ d(x,K) = \|x-k\|_E$;

iii₂) $\forall x \in E$, esiste al più un $k \in K :\ d(x,K) = \|x-k\|_E$.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 10 Giugno 2002 - soluzioni

1. Sia γ il cammino definito da $\gamma(t) := \exp(it)$, con $t \in [0, 2\pi]$ (si noti che $\gamma^* = \partial D_1$). Per la formula di CAUCHY, risulta, $\forall z \in D_1$,

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \, .$$

Ne viene che $\{f_n\}$ è di CAUCHY rispetto alla convergenza uniforme sui compatti in D_1: in effetti, se K è un compatto $\subset D_1$, si ha che $d(K, \partial D_1) := \inf_{k \in K, x \in \partial D_1} d(k, x) = \varrho > 0$; perciò $|z - \xi| \geq \varrho \quad \forall z \in K, \quad \forall \xi \in \partial D_1$, da cui

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{2\pi\varrho} \int_\gamma |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \, d\xi = \frac{1}{2\pi\varrho} \| f_n|_{\partial D_1} - f_m|_{\partial D_1} \|_{L^1(\partial D_1)} \, .$$

Si può quindi concludere che esiste una funzione f olomorfa in D_1 tale che $\{f_n\}$ tende uniformemente ad f sui compatti di D_1; in particolare, ovviamente, $f_n(z) \to f(z) \quad \forall z \in D_1$.

2. Fissati $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$\Omega_{\varepsilon,n} := \{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}; \qquad \Omega'_{\varepsilon,n} := \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \, .$$

Si ha allora che $\|f_n - f\|_p^p =$

$$= \int_{\Omega_{\varepsilon,n}} |f_n(x) - f(x)|^p \, dx + \int_{\Omega'_{\varepsilon,n}} |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \leq$$

$$\varepsilon^p |\Omega_{\varepsilon,n}| + 10^p |\Omega'_{\varepsilon,n}| \leq \varepsilon^p |\Omega| + 10^p |\Omega'_{\varepsilon,n}| \, ,$$

da cui la tesi.

3. *i)*: $k_1, k_2 \in K, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow (\alpha k_1 + \beta k_2)(0) = \alpha k_1(0) + \beta k_2(0) = 0$; $k_n \in K, \ k_n \to k \in E \Longrightarrow \ 0 \leq |k(0)| = |k(0) - k_n(0)| \leq \|k - k_n\|_E$.

ii): $\forall k \in K$, si ha $\|x - k\|_E \geq |x(0) - k(0)|$, quindi $d(x, K) \geq |x(0)|$. D'altra parte, posto $\widetilde{k}(t) := x(t) - x(0)$, si ha che $\widetilde{k} \in K$, quindi $d(x, K) \leq \|x - \widetilde{k}\|_E = |x(0)|$; in conclusione, $d(x, K) = |x(0)| = \|x - \widetilde{k}\|_E$. Tra l'altro, ciò dimostra che iii_1) è vera.

iii_2): l'affermazione è falsa. Ad esempio, se $x(t) := 1$, punti in K di minima distanza da x sono $k_1(t) := 0$ e $k_2(t) := t$.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 9 Luglio 2002

1. Calcolare (con metodi di variabile complessa)

$$I_n := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \qquad \text{per ogni intero } n \text{ non negativo.}$$

2. In $\mathbb{R}^2$, si consideri la famiglia $\mathcal{L}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, con la misura di Lebesgue λ. Costruire una misura relativa φ su $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L})$ tale che

$$\varphi(D_n(\mathrm{O})) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\pi}{k^2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove $D_n(\mathrm{O})$ è il disco aperto di centro O=$(0,0)$ e raggio n.
Determinare poi una decomposizione di Hahn di $\mathbb{R}^2$ rispetto a φ.
(*Suggerimento: può essere utile ragionare per corone circolari*).

3. Per ogni intero $n > 1$ fissato, sia T_n l'operatore così definito da ℓ^2 in sè: dato $x = \{x_k\} \in \ell^2$, si ponga $y = T_n x := \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$.

i) Verificare che T_n è lineare e continuo. T_n è iniettivo? È suriettivo?

ii) Calcolare $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)}$.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 9 Luglio 2002 - soluzioni

1. L'integrale improprio I_n esiste, quindi è lecito calcolarlo come $\lim_{R\to+\infty}\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$. Posto $f(z) := \dfrac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{-i,i\})$, si definiscano i cammini $\sigma_R : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R : [1,2] \to \mathbb{C}$, $C_R : [0,2] \to \mathbb{C}$ ponendo $\sigma_R(t) := R(2t-1)$, $\gamma_R(t) := -R\exp(i\pi t)$, $C_R := \sigma_R \cup \gamma_R$. Osservato che $\left|\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \le \pi R \max_{z\in\gamma_R^*}|f(z)| = \pi R(1+R^2)^{-n-1} \to 0$ per $R \to +\infty$, ne viene che $I_n = \lim_{R\to+\infty}\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i)$. Poichè $z = i$ è un polo di ordine $n+1$ per f, si ha che

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}\,\frac{(z-i)^{n+1}}{(z-i)^{n+1}(z+i)^{n+1}}\right]_{z=i} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}\,(z+i)^{-n-1}\right]_{z=i}.$$

Si dimostra facilmente per induzione che $\dfrac{d^n}{dz^n}\left[(z+i)^{-n-1}\right] = (-n-1)(-n-2)\dots(-n-n)(z+i)^{-2n-1} = (-1)^n\dfrac{(2n)!}{n!}(z+i)^{-2n-1}$; quindi $\mathrm{Res}(f,i) = \dfrac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1} i^{2n+1}}$, da cui $I_n = \dfrac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n}}$.

2. Posto $C_1 := D_1(O)$ e, $\forall k > 1$, $C_k := D_k(O)\setminus D_{k-1}(O) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid k-1 \le \sqrt{x^2+y^2} < k\}$, la misura relativa φ verifica la condizione richiesta se

$$\varphi(D_n(O)) = \varphi\left(\cup_{k=1}^n C_k\right) = \sum_{k=1}^n \varphi(C_k) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}\frac{\pi}{k^2}.$$

È quindi sufficiente scegliere una <u>qualunque</u> misura φ tale che, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi(C_k) = (-1)^{k+1}\pi/k^2$. Osservato che i $\{C_k\}$ sono a due a due <u>disgiunti</u>, e che la loro unione dà <u>tutto</u> $\mathbb{R}^2$, si può (ad esempio...) definire, $\forall A \in \mathcal{L}$, $\varphi(A) := \int_A f(x,y)\,d\lambda$, dove $f(x,y)$ è la funzione che, $\forall k \in \mathbb{N}$, su C_k assume il valore costante $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2(2k-1)}$ (è immediato verificare che con questa scelta risulta in effetti $\varphi(C_k) = (-1)^{k+1}\pi/k^2$). Una decomposizione di HAHN di $\mathbb{R}^2$ rispetto a φ è, ad esempio, data da (A_1, A_2), dove $A_1 := \cup_{k=1}^{+\infty} C_{2k-1}$ e $A_2 := \cup_{k=1}^{+\infty} C_{2k}$.

3. $i)$: la linearità di T_n è ovvia, così come la continuità (dato che $|T_n x|^2 = |x|^2 - x_n^2 \le |x|^2$); T_n non è iniettivo ($T_n e^{(n)} = 0$), mentre è suriettivo: $\forall y \in \ell^2$, posto $x := \{y_1, \dots, y_{n-1}, 0, y_n, y_{n+1}, \dots\}$ si ha che $T_n x = y$.

$ii)$: in $i)$ si è visto che $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)} \le 1$; poichè però $\forall k \ne n$ si ha $|T_n e^{(k)}| = 1$, ne segue che $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)} = 1$.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 24 Settembre 2002

1. Per $n, m \in \mathbb{N}$, si ponga

$$f(z) := \frac{(\sin z)^m}{(z-\pi)^n} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi\}).$$

i) Per quali valori di m ed n è possibile prolungare la definizione di f anche in π, in modo che la funzione $\widetilde{f}$ così prolungata risulti intera?

ii) Calcolare $\mathrm{Res}(f, \pi)$ per $m = 1,\ n = 1, 2, \ldots$

2. *i*) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione così definita: $f(0) = 0$; per $k = 1, 2, \ldots$, la restrizione di f all'intervallo $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ ha come grafico il segmento di estremi

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{(-1)^k}{k+1}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{k}, \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right).$$

Tale funzione è a variazione limitata in $[0,1]$?

ii) Se $\{g_n\}$ è una successione di funzioni continue ed a variazione limitata in $[0,1]$ che converge uniformemente ad una funzione g, si può concludere che g è a variazione limitata?

3. Nello spazio di Hilbert H, si definisca il seguente operatore:

$$Ax := \begin{cases} x & \text{se } |x| \le 1, \\ \dfrac{x}{|x|} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

dove $|\cdot|$ denota la norma in H.

i) Mostrare che A è la proiezione su un convesso chiuso e non vuoto K (quale?) di H.

ii) Posto $f(x) := d(x, K) = \inf_{k \in K} |x - k|$, verificare che f è lipschitziana.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 24 Settembre 2002 - soluzioni

1. *i*): posto $\xi := z - \pi$ (da cui $\sin z = -\sin\xi$), si ha che

$$\lim_{z\to\pi}\frac{(\sin z)^m}{(z-\pi)^n} = \lim_{\xi\to 0}(-1)^m\,\frac{(\sin\xi)^m}{\xi^n}\,.$$

Ne segue che il prolungamento cercato esiste se e solo se $m > n$ (definendo $\widetilde{f}(\pi) := 0$), oppure $m = n$ (definendo $\widetilde{f}(\pi) := (-1)^m$). Se $m < n$, f ha in π un polo di ordine $n - m$, e non è quindi prolungabile ad una funzione intera.

ii): per $m = n = 1$, è evidente che Res(f,π)= 0. Per $m = 1$, $n > 1$, si noti intanto che, posto $g(\xi) := -\dfrac{\sin\xi}{\xi^n}$ (si ricordi la sostituzione del punto *i*)), $\mathrm{Res}(f,\pi) = \mathrm{Res}(g,0)$; inoltre, $\forall\xi\neq 0$,

$$-\frac{\sin\xi}{\xi^n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!\,\xi^n}\,.$$

Poichè $2k+1-n = -1 \iff k = (n-2)/2$, ne risulta che:

se n è dispari, Res(f,π)= 0; se n è pari, Res(f,π)= $\dfrac{(-1)^{n/2}}{(n-1)!}$.

2. *i*): partendo dall'osservazione che $\left|f\left(\frac{1}{k+1}\right) - f\left(\frac{1}{k}\right)\right| > \frac{2}{k+1}$, è facile concludere che la variazione di f relativa alla partizione data dai punti $\left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\right\}$ è maggiore di $2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$. Per confronto con la serie armonica, si conclude che la funzione <u>non è</u> a variazione limitata su $[0,1]$.

ii): la risposta è negativa. Se f è la funzione del punto *i*), si consideri la successione $\{g_n\}$, dove $g_n(x) := x$ se $x \in \left[0, \frac{1}{2n+1}\right]$, e $g_n(x) := f(x)$ se $x \in \left]\frac{1}{2n+1}, 1\right]$. È evidente che ogni g_n è continua ed a variazione limitata; inoltre, $\{g_n\}$ converge uniformemente ad f su $[0,1]$.

3. *i*): posto $K := \{x \in H \mid |x| \le 1\}$, si noti intanto che $Ax \in K \;\; \forall x \in H$. Verifichiamo che A è l'operatore di proiezione su K, cioè che $\forall x \in H$ risulta $|x - Ax| \le |x - k| \;\; \forall k \in K$. Se $|x| \le 1$ ciò è ovvio; se $|x| > 1$, quindi $Ax = x/|x|$, si ha che $|x - Ax| = |x| - 1 \le |x| - |k| \le |x - k|$.

ii): Fissati ad arbitrio $x_1, x_2 \in H$ e $k \in K$, si ha $f(x_1) \le |x_1 - k| \le |x_1 - x_2| + |x_2 - k|$, da cui $f(x_1) \le |x_1 - x_2| + f(x_2)$; analogamente, $f(x_2) \le |x_2 - x_1| + f(x_1)$, e, in conclusione, $|f(x_1) - f(x_2)| \le |x_1 - x_2|$.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 22 Novembre 2002

1. Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \sin \frac{z}{z-1},$$

classificare le singolarità di f e calcolare i relativi residui.

$\Big($*Suggerimento : ricordare che*, $\forall w \in \mathbb{C}, \quad \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\Big)$.

2. In $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, si consideri la funzione d'insieme

$$\nu(A) := \int_A \frac{3}{4+5x^2}\, d\mu, \qquad A \in \mathcal{B},$$

dove $\mathcal{B}$ indica l'insieme dei boreliani di $\mathbb{R}$, e μ è la misura unidimensionale di LEBESGUE.

Dire perchè ν è una misura, e calcolare

$$\nu(\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2/\sqrt{5}\}).$$

3. Per ogni intero $n > 1$, si definisca $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } \frac{1}{n} < |x| \leq 1, \\ \frac{n}{2} & \text{se } 0 < |x| \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

i) Calcolare $f(x) := \lim_n f_n(x)$; la convergenza di $\{f_n\}$ ad f è solo *q.o.* in $]-1,1[$, oppure vale $\forall x \in [-1,1]$? È anche uniforme?

ii) Studiare se $\{f_n\}$ converge, nella topologia debole o in quella forte, in qualche $L^p(-1,1)$ con $p > 1$.

iii) Per ogni fissata $\varphi \in C^0([-1,1])$, calcolare il $\lim_n \int_{-1}^{1} f_n(x)\varphi(x)\, dx$.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 22 Novembre 2002 - soluzioni

1. f è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$; poichè non esiste $\lim_{z\to 1} f(z)$, si ha che $z = 1$ è una singolarità essenziale per f. Determiniamo lo sviluppo di LAURENT relativo al punto $z = 1$: un semplice calcolo mostra che

$$\sin \frac{z}{z-1} =$$

$$\sin\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\left(1+\frac{1}{z-1}\right)\right) - \exp\left(-i\left(1+\frac{1}{z-1}\right)\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2i}\left((\exp i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!(z-1)^n} - (\exp(-i))\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!(z-1)^n}\right) =$$

$$\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}\left(\frac{i^n \exp i}{n!} - \frac{(-i)^n \exp(-i)}{n!}\right) .$$

Dunque $\quad \mathrm{Res}(f,1) = \frac{1}{2i}\left(i \exp i + i \exp(-i)\right) = \cos 1.$

2. La funzione $x \mapsto \dfrac{3}{4+5x^2}$ è sommabile e non negativa in $\mathbb{R}$; di conseguenza, ν è una misura finita. Inoltre,

$$\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}\ :\ |x| \geq \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}\right) = 2\int_{2/\sqrt{5}}^{+\infty} \frac{3}{4+5x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int_{2/\sqrt{5}}^{+\infty} \frac{dx}{1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2} =$$

$$\frac{3}{2}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\int_1^{+\infty}\frac{d\tau}{1+\tau^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4\sqrt{5}} .$$

3. *i)*: per $x = 0$ si ha $f(0) = 0$; per $|x| > 0$, dato che per $n > \dfrac{1}{|x|}$ si ha $f_n(x) = 0$, ne viene che f è la funzione identicamente nulla, ed $f_n(x) \to 0$ $\forall x \in [-1,1]$. La convergenza non è uniforme: $\sup_{-1\leq x\leq 1}|f_n(x)| = \frac{n}{2}$.

ii): $\|f_n\|_p^p = \displaystyle\int_{-1/n}^{1/n}\frac{n^p}{2^p}\,dx = \frac{n^{p-1}}{2^{p-1}}$; quindi $\|f_n\|_p = \dfrac{n^{1/q}}{2^{1/q}}$ (con $p+q = pq$); inoltre, $\{f_n\}$ non è limitata in $L^p(-1,1)$. Perciò, $\{f_n\}$ non può convergere neppure debolmente.

iii): $\displaystyle\int_{-1}^{1} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n}\varphi(x)\,dx = \varphi(h)$ per un opportuno h con $|h| < 1/n$, grazie al teorema della media. Quindi $\displaystyle\lim_n \int_{-1}^{1} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 6 Febbraio 2003

1. Determinare i numeri $\alpha \in \mathbb{C}$ tali che la funzione $f_\alpha(z) = f_\alpha(x+iy) := x^2 - y^2 + \alpha xy$ sia olomorfa in $\mathbb{C}$. Per tali valori di α, calcolare f'_α.

2. Dare un esempio di una successione di funzioni $\{f_n\}$ tale che:
i) $f_n \in L^2(0,+\infty) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$;
ii) $f_n \to 0$ *q.o.* in $]0,+\infty[$;
iii) $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^2(0,+\infty)} = +\infty$.

3. Sia $H := L^2(\mathbb{R})$ con $(f,g) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$, e sia $\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che $\langle \varphi, f\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.
i) Provare che $\varphi \in H'$.
ii) Trovare $\|\varphi\|_{H'}$.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 6 Febbraio 2003 - soluzioni

1. Posto $\alpha : \alpha_1 + i\alpha_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, si ha che

$$f_\alpha(z) = x^2 - y^2 + \alpha_1 xy + i\alpha_2 xy =: u(x,y) + iv(x,y)\,,$$

con le funzioni u e v che soddisfano:
$u_x = 2x + \alpha_1 y;$ $\quad v_x = \alpha_2 y;$ $\quad u_y = -2y + \alpha_1 x;$ $\quad v_y = \alpha_2 x\,.$

Le condizioni di CAUCHY-RIEMANN sono verificate se e solo se

$$2x + \alpha_1 y = \alpha_2 x \quad \text{e} \quad -2y + \alpha_1 x = -\alpha_2 y,$$

cioè

$$x(2 - \alpha_2) = -\alpha_1 y \quad \text{e} \quad y(\alpha_2 - 2) = -\alpha_1 x\,,$$

da cui $\alpha_1 = 0$, $2 - \alpha_2 = 0$. Dunque f_α è olomorfa se e solo se $\alpha = 2i$; poichè $f_{2i}(z) = f_{2i}(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 = z^2$, ne viene che $f'_{2i}(z) = 2z$.

2. Basta ad esempio definire

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{se } n \le x < n+1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha che $f_n(x) \to 0 \quad \forall x > 0$, mentre $\|f_n\|_{L^2(0,+\infty)} = n$ tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$.

3. $i)$: la linearità di φ è ovvia; φ è anche limitata, dato che $|\langle \varphi, f\rangle| \le \displaystyle\int_0^1 |f(x)| \cdot 1\, dx \le \|f\|_{L^2(0,1)}\, \|1\|_{L^2(0,1)} \le \|f\|_H \cdot 1$, quindi $\varphi \in H'$.

$ii)$: per quanto visto in $i)$, si ha $\|\varphi\|_{H'} \le 1$; poichè, d'altra parte, $\chi_{[0,1]} \in H$, $\|\chi_{[0,1]}\|_H = 1$, e $\langle \varphi, f\rangle = (f, \chi_{[0,1]})$, per il teorema di RIESZ ne viene che $\|\varphi\|_{H'} = \|\chi_{[0,1]}\|_H = 1$.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 9 Maggio 2003

a) Dare un esempio *esplicito* di una funzione $f \in L^2(0, +\infty)$ tale che, $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) \neq 0$.

b) Dare un esempio *esplicito* di una funzione $g \notin L^2(0, +\infty)$ tale che $g \in L^p(0, +\infty)$ $\forall p \in [1, 2)$.

c) Dare un esempio *esplicito* di una funzione $h \notin L^2(0, +\infty)$ tale che $h \in L^p(0, +\infty)$ $\forall p > 2$.

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 13 giugno 2003

Fornire uno dei seguenti due esempi, a vostra scelta, oppure entrambi se riuscite.

1. Esempio di una funzione f olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$, con un polo di ordine 5 e residuo -3 in $2i$.

2. Esempio di un convesso K di $L^2(0,1)$ che non sia chiuso e di un elemento $f_0 \in L^2(0,1) \setminus K$ tale che non esista il minimo della distanza di f_0 dal generico elemento di K.

Sia E lo spazio vettoriale delle successioni reali convergenti ($x = \{x_n\} \in E \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ esiste finito il $\lim_{n \to +\infty} x_n$), e si ponga $|||x||| := \lim_{n\to+\infty} |x_n|$.

1) $|||.|||$ é una norma su E?

2) Si verifichi che $E \subset \ell^\infty$.

Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in E$ risulti $|||x||| \leq c\, \|x\|_\infty$?

Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in E$ risulti $\|x\|_\infty \leq c\, |||x|||$?

3) Posto $y := \{(-1)^{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$ (elemento dunque di ℓ^∞ che non appartiene ad E), esiste una successione di vettori $x^{(k)} \in E$ tali che $\|x^{(k)} - y\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$?

(Le risposte devono essere adeguatamente motivate).

Dato il 2 settembre 2003 con una mezzora di tempo

Istituzioni di Analisi Superiore

Prova scritta del 26 settembre 2003

1. Dare un esempio esplicito di un operatore lineare $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$.

2. Dare un esempio esplicito di operatore A lineare e limitato da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}^2$, quando su $\mathbb{C}^2$ si consideri una delle norme $\|\cdot\|_p$, con

$$\|z\|_p := \left(\sum_{i=1}^{2} |z_i|^p\right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty;$$

$$\|z\|_\infty := \max\{|z_1|, |z_2|\}; \qquad \forall\, z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

3. Posto $E_p = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_p)$ per $1 \leq p \leq \infty$, dare un esempio esplicito di due operatori

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}; E_1), \qquad B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}; E_\infty)$$

tali che $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}; E_1)} = \|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}; E_\infty)} = 1.$

Istituzioni di Analisi Superiore

Appello del 21 novembre 2003

Sia $H = \mathbb{R}^3$ munito della norma euclidea.
Si consideri il funzionale lineare e continuo

$$\langle L, x \rangle = 3x_1 - 4x_3 , \quad \forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in H.$$

1. Trovare $y \in H$ tale che

$$\langle L, x \rangle = (x, y) \quad \forall\, x \in H,$$

dove $(\;,\;)$ denota il prodotto scalare in H.

2. Calcolare poi $\| L \|_{H'}$ e verificare che $\| L \|_{H'} = \| y \|_H$.

3. Fissato $z = (-1, 3, \sqrt{6})$, indicare esplicitamente due funzionali lineari e continui L_1 ed L_2 tali che

$$\| L_1 \|_{H'} < \| z \|_H < \| L_2 \|_{H'} .$$

Istituzioni di Analisi Superiore

Appello del 26 febbraio 2004

Considerato lo spazio $L^2(0,1)$, dare un esempio di un sottospazio X di $L^2(0,1)$ che abbia dimensione finita uguale a 3. Una volta fissato X, trovare poi la proiezione su X della funzione $f \equiv 0$ (meglio, della classe di funzioni $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ tali che $f(x)=0$ per q.o. $x \in (0,1)$).

Istituzioni di Analisi Superiore

Scritto proposto il 29 marzo 2004

In $\mathbb{R}^3$ sia ξ il vettore $\xi = (1, -1, 0)$ e sia V la retta passante per l'origine e per ξ (varietà lineare generata da ξ). Dato il generico vettore $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, si determini la proiezione Px di x su V.

Scrittino assegnato in un appello di Istituzioni di Analisi Superiore del 9.07.04

Dare un esempio di operatore lineare e continuo

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

tale che

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)} = 3$$

Istituzioni di Analisi Superiore

Appello del 5 novembre 2004

1. In $\mathbb{R}^2$, dati i due vettori $x = \{x_1; x_2\}$, $y = \{y_1; y_2\}$, poniamo $((x,y)) = 4x_1y_1 + x_2y_2$.
   a) Verificare che $((x,y))$ è un prodotto scalare, rispetto al quale $\mathbb{R}^2$ è uno spazio di Hilbert H.
   b) Se V è il sottospazio $V := \{\{t;t\} \mid t \in \mathbb{R}\}$ di H, caratterizzare il sottospazio ortogonale W.
   c) Determinare la proiezione su V del vettore $\{-1;1\}$.

2. Dire (motivando le risposte) se esistono o no delle successioni $\{f_n\}, \{g_n\}, \{u_n\}, \{v_n\}$ in $L^\infty(0,1)$ tali che
   a) $\|f_n\|_{L^1(0,1)} \longrightarrow 0$ ma $\|f_n\|_{L^\infty(0,1)} \longrightarrow +\infty$;
   b) $\|g_n\|_{L^\infty(0,1)} \longrightarrow 0$ ma $\|g_n\|_{L^1(0,1)} \longrightarrow +\infty$;
   c) $\|u_n\|_{L^1(0,1)} \longrightarrow 0$ ma $\|u_n\|_{L^2(0,1)} \longrightarrow +\infty$;
   d) $\|v_n\|_{L^2(0,1)} \longrightarrow 0$ ma $\|v_n\|_{L^1(0,1)} \longrightarrow +\infty$

per $n \longrightarrow +\infty$.

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

17 dicembre 2004

1. Indicata con $\mathcal{B}$ la famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$ contenuti nell'intervallo $[-1,2]$, sia $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione d'insieme così definita

$$\mu(A) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0 \in A \ \text{e} \ 1 \in A \\ 1 & \text{se} \quad 0 \in A \ \text{e} \ 1 \notin A \\ 1 & \text{se} \quad 0 \notin A \ \text{e} \ 1 \in A \\ 0 & \text{se} \quad 0 \notin A \ \text{e} \ 1 \notin A \end{cases}, \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Si dica se μ è una misura (σ-additiva), giustificando la risposta.

2. Sia ℓ^2 lo spazio di Hilbert delle successioni reali $x = (x_n)$ tali che $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$. Si consideri l'applicazione $T : \ell^2 \to \ell^2$ che ad $x = (x_n)$ associa $y = (y_n)$ con $y_n = 2x_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Studiare linearità, continuità, limitatezza di T. L'operatore T è suriettivo?

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Prova scritta del 4 Febbraio 2005

In $\mathbb{R}^2$, indichiamo con $\|\,.\,\|_p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ le norme definite da

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\};$$
$$\|x\|_p := (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} \qquad (1 \leq p < +\infty),$$

dove $x = (x_1, x_2)$. Per ogni $p \in [1, +\infty]$, determinare, nella metrica indotta da $\|\,.\,\|_p$:

a) la distanza dell'origine $(0, 0)$ da A,

b) i punti di A che realizzano tale distanza,

in ciascuno dei seguenti casi:

1) A è il segmento chiuso di estremi $(0, 1)$ e $(1, 0)$;

2) A è l'arco chiuso, contenuto nel primo quadrante, della circonferenza unitaria.

Scritto del 4/2/2005 - Soluzione

Si tratta di determinare, per ogni $p \in [1, +\infty]$, il minimo ed i punti di minimo dell'applicazione $x \mapsto \|x\|_p$ da A in $\mathbb{R}$ (si osservi che in entrambi i casi A è *compatto*). Inoltre, dato che $(1,0) \in A$, e $\|(1,0)\|_p = 1$, il minimo non può essere > 1. Esaminiamo separatamente i due casi proposti per A.

1). In questo caso, $A = \{x_t := (t, 1-t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$, quindi, per ogni $t \in [0,1]$, risulta:

• $\|x_t\|_1 = t + (1-t) = 1$: la funzione vale identicamente 1 in A, quindi il minimo vale 1, e tutti i punti di A sono punti di minimo per $\|x_t\|_1$.

• Per $1 < p < +\infty$, è equivalente studiare il minimo in $[0,1]$ della funzione $f_p(t) := \|x_t\|_p^p = t^p + (1-t)^p$. Si ha che $f_p \in C^\infty(0,1)$, e $f_p'(t) = p\left(t^{p-1} - (1-t)^{p-1}\right)$ si annulla in $]0,1[$ solo per $t = \frac{1}{2}$. Poiché $f_p(1/2) = 2^{1-p} < 1$, si conclude facilmente che il punto $x_{1/2} := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è l'*unico* punto di minimo in A per $\|x\|_p$; il valore del minimo è $2^{(1-p)/p}$.

• Infine, $\|x_t\|_\infty = \max\{t, 1-t\} = \frac{1}{2} + \left|t - \frac{1}{2}\right|$; in questo caso, l'unico punto di minimo è ancora $x_{1/2}$, ed il valore del minimo è $\frac{1}{2}$.

2). Si ha $A = \{y_t := (\cos t, \sin t) \mid 0 \leq t \leq \pi/2\}$, quindi:

• $\|y_t\|_1 = \cos t + \sin t = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$; il minimo di questa funzione in $[0, \pi/2]$ è assunto per $t = 0$ e $t = \pi/2$, e vale 1; i punti di minimo sono $(0,1)$ e $(1,0)$.

• Per $1 < p < +\infty$, poniamo $g_p(t) := \|y_t\|_p^p = (\cos t)^p + (\sin t)^p$; si ha $g_p'(t) = p\left(-\sin t(\cos t)^{p-1} + \cos t(\sin t)^{p-1}\right)$, che si annulla in $]0, \pi/2[$ se e solo se $t = \pi/4$. Dato che $g_p(\pi/4) = 2^{(2-p)/2}$, quantità < 1 se e solo se $p > 2$, si conclude che:

$\star$ se $1 < p < 2$, il minimo di $\|y_t\|_p$ per $y_t \in A$ vale 1, ed è assunto nei punti $(0,1)$ ed $(1,0)$;

$\star$ se $2 < p < +\infty$, il minimo vale $2^{(2-p)/(2p)}$, ed è assunto nel punto $y_{\pi/4} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$;

$\star$ infine, per $p = 2$ si ha $\|y_t\|_2 = 1 \ \forall t \in [0, \pi/2]$: la funzione è *costante*, e tutti i punti di A realizzano la distanza dell'origine da A.

• Per $p = +\infty$ si ha

$$\|y_t\|_\infty = \max\{\sin t, \cos t\} = \begin{cases} \cos t & \text{se } 0 \leq t \leq \pi/4, \\ \sin t & \text{se } \pi/4 < t \leq \pi/2; \end{cases}$$

il punto di A che ha minima distanza dall'origine è ancora $y_{\pi/4}$, e la distanza dell'origine da A vale $\sqrt{2}/2$.

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

31 marzo 2005

Dati p e q tali che $1 \leq p < q \leq +\infty$, verificare quali delle seguenti inclusioni (insiemistiche) sono vere e quali sono false:

a) $L^p(0,1) \subseteq L^q(0,1)$, $L^q(0,1) \subseteq L^p(0,1)$;

b) $\ell^p \subseteq \ell^q$, $\ell^q \subseteq \ell^p$;

c) $L^p(\mathbb{R}) \subseteq L^q(\mathbb{R})$, $L^q(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$.

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Prova scritta del 27 Luglio 2005

1. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ la funzione così definita:

$$f(z) := \frac{z}{\cos z - 1}.$$

a) Dire se per $z = 0$ la singolarità della funzione è:
i) eliminabile;
ii) un polo di ordine k (in questo caso, specificare k);
iii) essenziale.

b) Calcolare $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, dove Γ è la circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio ϱ, con $0 < \varrho < 2$ e $\varrho \neq 1$, percorsa una volta nel verso antiorario.

2. Sia $\mathfrak{c}_0$ l'insieme delle successioni (reali o complesse) $x = \{x_n\}$ *infinitesime*. Mostrare che:

a) $\mathfrak{c}_0$ è contenuto in ℓ^∞; inoltre, per ogni $x = \{x_n\} \in \mathfrak{c}_0$ esiste $k = k(x)$ tale che $\|x\|_{\ell^\infty} = |x_k|$.

b) $\mathfrak{c}_0$ è una *varietà lineare* di ℓ^∞; anzi, è possibile (come?) definire in ℓ^∞ un prodotto $(x,y) \mapsto xy$ rispetto al quale $\mathfrak{c}_0$ è un ideale (bilatero) in ℓ^∞.

c) $\mathfrak{c}_0$ è *chiuso* in ℓ^∞.

Scritto del 27/7/2005 - Soluzione

1. *a*) Poiché

$$\lim_{z\to 0}|f(z)| = \lim_{z\to 0}\frac{|z|}{|2\sin^2(z/2)|} = +\infty,$$

il punto $z = 0$ è un *polo* per la funzione. Per determinarne l'ordine, basta osservare che, in un intorno dell'origine privato dell'origine stessa, risulta

$$f(z) = -\frac{2}{z}\frac{(z/2)^2}{\sin^2(z/2)}; \quad \text{inoltre,} \quad \lim_{z\to 0}\frac{(z/2)^2}{\sin^2(z/2)} = 1.$$

Ne segue che $\lim_{z\to 0} z\,f(z) = -2$: la funzione g definita, ad esempio in $\Omega := \Sigma(1,3) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 3\}$, da

$$g(z) := \begin{cases} z\,f(z) & \text{se } z \in \Omega\setminus\{0\}, \\ -2 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

è quindi *analitica* in Ω, dove perciò risulta $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n\,z^n$; ne viene che, $\Omega\setminus\{0\}$, si ha $f(z) = -\frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1}\,z^n$. Quindi $z = 0$ è un polo del primo ordine per f; il residuo di f per $z = 0$ è uguale a -2.

b) Per il teorema dei residui, da quanto visto sopra è immediato concludere che:

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \varrho < 1, \\ -4\pi i & \text{se } 1 < \varrho < 2. \end{cases}$$

2. *a*) La prima affermazione è ovvia (ogni successione infinitesima è limitata). Sia $x = \{x_n\} \in \mathfrak{c}_0$: esiste allora $\overline{n}$ tale che, ad esempio, $|x_n| \le 1$ per ogni $n > \overline{n}$. Posto $\lambda := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{\overline{n}}|, 1\}$, risulta evidentemente $|x_n| \le \lambda \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

b) La prima proprietà è conseguenza della linearità del limite. Se in ℓ^∞ si definisce *prodotto* di $x = \{x_n\}$, $\{y_n\}$ la successione $xy := \{x_n\,y_n\}$ (possibile perché $|x_n\,y_n| \le \|x\|_\infty\,\|y\|_\infty$; è chiaro che $xy = yx$), quando $x \in \mathfrak{c}_0$ risulta, per ogni $y \in \ell^\infty$, $|x_n\,y_n| \le |x_n|\,\|y\|_\infty \to 0$, quindi $xy = yx \in \mathfrak{c}_0$.

c) Sia $\{x^{(n)}\}$ una successione in $\mathfrak{c}_0$ che tende ad x in ℓ^∞. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\|x - x^{(n)}\|_\infty = \sup_k |x_k - x_k^{(n)}| < \varepsilon$. Poiché $x^{(n)} \in \mathfrak{c}_0$, esiste k_ε tale che $\forall k > k_\varepsilon$ si ha $|x_k^{(n)}| < \varepsilon$. In conclusione, per ogni $k > k_\varepsilon$ risulta

$$|x_k| \le |x_k - x_k^{(n)}| + |x_k^{(n)}| < 2\varepsilon,$$

quindi anche $\{x_n\}$ è infinitesima, cioè $x \in \mathfrak{c}_0$; dunque $\mathfrak{c}_0$ è *chiuso* in ℓ^∞.