ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Scritto d'esame dell'8 giugno 1998

1. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{2z^2-2iz-1}$ dove γ è il cammino chiuso, percorso una volta in senso antiorario, la cui immagine nel piano complesso è la circonferenza $|z-2|=2$.

2. Determinare la misura bidimensionale di Lebesgue dell'insieme

$$I=\left\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]:\ \sin x\leq\frac{1}{2},\ \cos(x+y)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right\}.$$

3. Sia $E=\left\{f\in C^0([0,2]):\ f(0)=f(1)=f(2)=0\right\}$.
   (i) E è chiuso in $C^0([0,2])$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$?
   (ii) E è chiuso in $C^0([0,2])$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$?
   (iii) Se $g(x)=x$ per $x\in[0,2]$, trovare (se esiste) un elemento di E di minima distanza da g rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ e rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$. Tale elemento è unico?

SOLUZIONI SCRITTO DELL'8/6/98

1. $2z^2 - 2iz - 1 = 0$ per $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ e $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

z_0 e z_1 sono poli semplici per $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 - 2zi - 1}$

z_0 è all'interno del circuito γ

z_1 è all'esterno del circuito γ

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = 1/2$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \pi i .$$

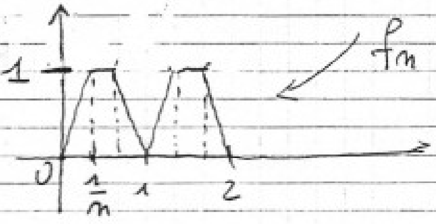
2. Sia $r \in \mathbb{R}$, l'insieme $E_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(x+y) = r\}$ è costituito al più da una infinità numerabile di rette, ciascuna di misura nulla.

Pertanto $\underline{I}$ ha la stessa misura dell'insieme

$$\{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid \sin x \le \tfrac{1}{2}\} .$$

Dunque la misura di I è $\dfrac{\pi}{6}$.

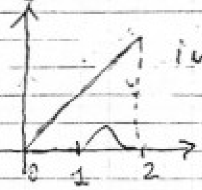
3. (i) sì



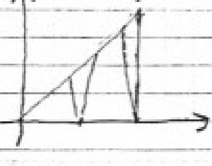
(ii) no

(iii) (•) $\forall f \in E$, $\|f - g\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \ge |f(2) - g(2)| = 2$.

Pertanto $d_\infty(E, g) = 2$ e vi sono infiniti elementi che realizzano questa distanza



(•)



$d_2(E, g) = 0$ e non vi è alcun elemento di E che realizzi $d_2(E, g)$

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Scritto d'esame del 10 luglio 1998

1. Individuare le singolarità isolate della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(iz^2 - 2 + (2i-1)z)(e^z - 1)}{z^5(z^2+1)} \sin \frac{1}{z+4}$$

e per ciascuna dire se si tratta di singolarità eliminabile, polo o singolarità essenziale. Nel caso di poli, precisarne anche l'ordine.

2. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni assolutamente continue in $[0,1]$ tali che $f_n(0) = 0$, $f_n' \in L^2(0,1)$ ed esiste una costante $K > 0$ tale che $\|f_n'\|_{L^2(0,1)} \leq K \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(i) La successione delle derivate, $\{f_n'\}$, converge debolmente a qualche funzione in $L^2(0,1)$?

(ii) Provare che esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$ tale che, per ogni $x \in [0,1]$, la successione numerica $\{f_{n_k}(x)\}$ è convergente.

3. Per $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^{(\infty)}$ si ponga $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$. Sia poi $E \subseteq \ell^{(\infty)}$ l'insieme di tutte le successioni infinitesime e sia F il sottospazio di E generato dalle successioni della forma $(\frac{1}{2}, -1, 0, 0, \dots)$, $(0, \frac{1}{2}, -1, 0, 0, \dots)$, $(0, 0, \frac{1}{2}, -1, 0, 0, \dots)$, ...

(i) Si provi che f è un funzionale lineare e continuo su $\ell^{(\infty)}$ e si calcoli $\|f\|_{(\ell^{(\infty)})'}$.

(ii) E è un sottoinsieme convesso di $\ell^{(\infty)}$?

(iii) Utilizzando il funzionale f, valutare se F è denso oppure no in E.

Soluzioni scritto del 10/7/98

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$; $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$

$iz^2 - 2 + (2i-1)z = i(z+2)(z+i)$

$$f(z) = \frac{i(z+2)\cancel{(z+i)}\cdot\left(z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)}{z^5\cancel{(z+i)}(z-i)} \cdot \sin\frac{1}{z+4}$$

$$= \frac{2iz + o(z)}{z^5(z-i)} \cdot \sin\frac{1}{z+4}$$

$z=-i$ singolarità eliminabile; $z=i$ polo del primo ordine; $z=0$ polo del quarto ordine; $z=-4$ singolarità essenziale

2. (i) no; ad esempio $f_n(x) = (-1)^n x$ $\quad x \in [0,1]$.

(ii) $L_2(0,1)$ è riflessivo e (f_n') è limitata in norma

$\Rightarrow \exists\, (f_{n_k}')$ sottosuccessione di (f_n'), $\exists\, f \in L_2(0,1)$ tali che $f_{n_k}' \rightharpoonup f$, cioè $(f_{n_k}', g) \to (f, g)$, $\forall g \in L_2(0,1)$.

Scelgo $g = \chi_{[0,x]}$ = funzione caratt. di $[0,x]$, $x \in [0,1]$

$$(f_{n_k}', \chi_{[0,x]}) = \int_0^1 f_{n_k}'(t)\, \chi_{[0,x]}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^x f_{n_k}'(t)\, dt \longrightarrow \int_0^1 f(t)\, \chi_{[0,x]}(t)\, dt = \int_0^x f(t)\, dt$$

Poiché f_{n_k} è assolutamente continua e $f_{n_k}(0) = 0$

$\int_0^x f_{n_k}'(t)\, dt = f_{n_k}(x)$. Dunque, $\forall x \in [0,1]$

$f_{n_k}(x) \to \int_0^x f(t)\, dt$

3.

(i) Sia $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$; $a \in \ell_1$ e

$f(x) = {}_{\ell_1}\langle a, x \rangle_{\ell_\infty}$. Dunque f è lineare e continuo su ℓ_∞ e per il teorema di rappresentazione $\|f\|_{(\ell_\infty)'} = \|a\|_{\ell_1}$,

dove $\|a\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

(ii) E è un sottospazio di ℓ_∞, dunque è convesso.

(iii) $f(x) = 0$, $\forall x \in \left\{\left(\frac{1}{2}, -1, 0, \ldots\right), \left(0, \frac{1}{2}, -1, 0, \ldots\right) \ldots\right\}$

Dunque f è identicamente nullo su F.

Sia $\bar{x} = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, $\bar{x} \in E$,

$f(\bar{x}) = \frac{1}{2}$; pertanto f non è identicamente nullo su $E \Rightarrow F$ non è denso in E.

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Scritto d'esame del 25 settembre 1998

1. Trovare un cammino chiuso γ passante per i punti $\{3, i, -3, -i\}$ del piano complesso tale che l'indice del punto 0 rispetto a γ sia 2. Esprimere γ mediante una parametrizzazione.

2. Indicata con $\mathcal{B}$ la famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$ contenuti nell'intervallo $[-2,5]$, sia $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ la funzione di insieme così definita

$$\mu(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } 1 \in A \text{ e } 3 \in A \\ 1 & \text{se } 1 \in A \text{ e } 3 \notin A \\ 1 & \text{se } 1 \notin A \text{ e } 3 \in A \\ 0 & \text{se } 1 \notin A \text{ e } 3 \notin A \end{cases}, \quad A \in \mathcal{B}.$$

Si dica se μ è una misura σ-additiva e σ-finita, giustificando le risposte.

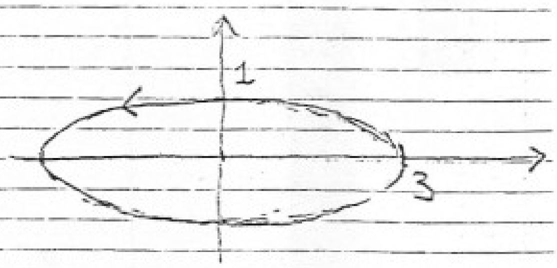
3. Sia $\ell^{(2)}$ lo spazio di Hilbert delle successioni reali $x = \{x_n\}$ tali che $\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$. Si consideri il sottoinsieme A di $\ell^{(2)}$ definito da

$$A = \left\{ x \in \ell^{(2)} : \sum_{n=1}^{3} x_n^2 \leq 1 \right\}.$$

Si provi che A è non vuoto, convesso e chiuso in $\ell^{(2)}$. Fissato poi z arbitrario in $\ell^{(2)}$, si espliciti la proiezione di z su A (suggerimento: ricordare la disuguaglianza variazionale).

Soluzioni Scritto del 25/9/98

1. Ad esempio, γ = ellisse



come in figura, percorsa
2 volte in senso antiorario

Dunque: $\frac{x_1^2}{3^2} + \frac{x_2^2}{1^2} = 1$.

In forma parametrica: $x_1 = 3\cos t$, $x_2 = \sin t$, $t \in [0, 4\pi]$.

2. $\mu = \delta_1 + \delta_3$, dove δ_i indica la misura di Dirac concentrata in $\{i\}$. Pertanto μ è σ-additiva e finita.

3. Sia B la bolla chiusa in $\mathbb{R}^3$ di centro $(0,0,0)$ e di raggio 1. Se (x_1, x_2, x_3) è un punto di $\mathbb{R}^3$, la sua proiezione su ∂B è il punto di coordinate $\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)$.

Si ha: A è isometrico a $B \times \ell^{(2)}$, dunque A è non vuoto, chiuso e convesso. Inoltre se $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, \dots z_n, \dots) \in \ell^{(2)}$ la sua proiezione $P_A z$ su A è

$$P_A z = \begin{cases} z & \text{se } z \in A, \text{ cioè } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \le 1 \\ \left(\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}}, \frac{z_2}{\sqrt{\dots}}, \frac{z_3}{\sqrt{\dots}}, z_4, \dots, z_n, \dots\right) & \text{se } z \notin A \end{cases}$$

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Scritto d'esame del 13 novembre 1998

1. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri interi positivi e sia $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la funzione d'insieme definita da

$$\mu(E) = \text{cardinalità di } E \quad , \qquad E \subseteq \mathbb{N}.$$

(i) Verificare che μ è una misura σ-finita su $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

(ii) Considerato lo spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, si dica quando una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è misurabile. E quando è sommabile?

(iii) Si consideri poi la convergenza uniforme di f_k a f in $\mathbb{N}$ e la si confronti con altri tipi di convergenza (quasi ovunque, quasi uniforme, in misura).

2. Posto $H = L^2(\mathbb{R})$, sia $F : H \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$F(u) = \int_{-1}^{0} u(x)\,dx - \int_{0}^{1} u(x)\,dx \quad , \quad u \in L^2(\mathbb{R}).$$

(i) F è lineare e continuo? In caso affermativo, si calcoli $\|F\|_{H'}$.

(ii) Determinare tutti e soli gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $E_\alpha = \{u \in H \ : \ F(u) = \alpha\}$ è chiuso, è un sottospazio, è convesso.

(iii) Sia ora $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che E_α è sottospazio chiuso di H. Determinare la proiezione di $\chi_{[-1,1]}$ (funzione caratteristica dell'intervallo $[-1,1]$) su E_α.

3. Calcolare, con il metodo dei residui, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{4 + x^4}\,dx .$$

Soluzioni scritto del 13 novembre 1998

1. (i) ovvio

(ii) Ogni $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è misurabile; è sommabile $\iff \sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)| < +\infty$

(iii) La convergenza uniforme è equivalente alla convergenza quasi uniforme (ovvio) e a quella in misura. Infatti: a) $f_k \to f$ in misura $\Rightarrow$ $\forall \sigma > 0$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{k}$ t.c. $\forall k \geq \bar{k}$

$\mu\{n \mid |f_k(n) - f(n)| > \sigma\} < \varepsilon$. Scegliendo $\varepsilon < 1$

$\Rightarrow \mu\{n \mid |f_k(n) - f(n)| > \sigma\} = 0$, cioè

$\{n \mid |f_k(n) - f(n)| > \sigma\} = \emptyset$, cioè per $k \geq \bar{k}$

$\forall n$ si ha $|f_k(n) - f(n)| \leq \sigma$, cioè $f_n \to f$ unifor.;

b) il viceversa è ovvio.

Si noti invece che la convergenza quasi ov. (= conv. puntuale) non implica la convergenza uniforme.

2. $F(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\chi_{[-1,0]}(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} u(x)\chi_{[0,1]}(x)\,dx =$

$= (u, \chi_{[-1,0]} - \chi_{[0,1]})$ - (i) Dunque F è lineare e continuo e $\|F\|_{H'} = \sqrt{2}$.

(ii) E_α è chiuso per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, E_α è sottospazio per $\alpha = 0$; E_α è convesso per ogni α $[F(tu_1 + (1-t)u_2) = \alpha t + (1-t)\alpha = \alpha]$.

(iii) $E_0 = \{u \in L_2(\mathbb{R}) \mid \int_{-1}^{0} u(x)\,dx = \int_0^1 u(x)\,dx\}$

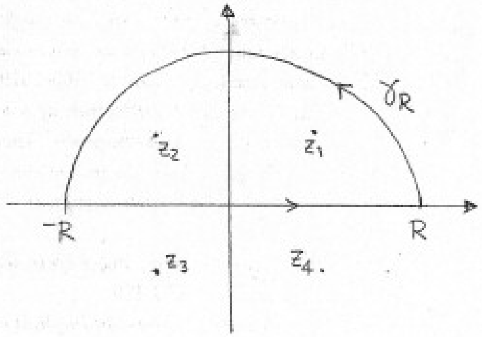
$\chi_{[-1,1]} \in E_0 \Rightarrow P_{E_0}\chi_{[-1,1]} = \chi_{[-1,1]}$.

3. Si noti che la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{2}{4 + z^4}$$

ha quattro poli semplici nei punti $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, $z_2 = \sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}$, $z_3 = \sqrt{2}\,e^{-i3\pi/4}$, $z_4 = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$ che annullano il denominatore.

Portanto, applicando il teorema dei residui al cammino chiuso $\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$ rappresentato in figura con $R > \sqrt{2}$, si trova



$$(*) \quad \int_{-R}^{R} \frac{2}{4 + x^4}\,dx = -\int_{\gamma_R} f(z)\,dz + 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f; z_1) + \mathrm{Res}(f; z_2)\right)$$

Ora, si controlla facilmente che

$$\mathrm{Res}(f; z_1) = \lim_{z \to z_1} \cancel{(z - z_1)} \frac{2}{\cancel{(z - 1 - i)}(z + 1 - i)(z + 1 + i)(z - 1 + i)}$$

$$= \frac{1}{4i(1+i)},$$

$$\mathrm{Res}(f; z_2) = \frac{1}{4i(1-i)},$$

per cui, sostituendo e passando al limite per $R \to \infty$ nella $(*)$, si trova

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{4 + x^4}\,dx = 2\pi i\,\frac{1 + i + 1 - i}{4i(1 - i^2)} = \frac{\pi}{2}.$$

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Scritto d'esame del 22 gennaio 1999

1. Posto $X = C^0([0,1])$, sia T l'applicazione definita da

$$T : X \to X, \qquad (Tu)(t) := e^{u(t)} - 1, \quad u \in X, \ t \in [0,1].$$

(i) L'operatore T è lineare?
(ii) T è continuo in 0 (elemento nullo di X)?
(iii) T mappa limitati di X in limitati di X?
(iv) Esiste una costante $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\| Tu \|_X \leq L \| u \|_X \qquad \forall\, u \in X\,?$$

Che succede invece per (i)-(iv) se $X = L^1([0,1])$?

2. Sia M lo spazio di tutte le (classi di) funzioni $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ misurabili (e uguali tra loro q.o.) tali che

$$N(u) = \int_0^1 \sqrt{|u(x)|}\, dx < +\infty.$$

(i) Provare che M è uno spazio vettoriale.
(ii) Provare che $N : M \to [0,+\infty)$ non è una norma.
(iii) Posto $d(u,v) = N(u-v)$ per $u, v \in M$, dimostrare che d è una distanza in M.
(iv) Provare che se $u_n \to u$ in $L^1(0,1)$, allora $u_n \to u$ in M.

3. Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{1+i, -2i\} \longrightarrow \mathbb{C}$, olomorfa nel suo dominio, che abbia un polo di ordine 4 in $(1+i)$ con $\mathrm{res}(f, 1+i) = -3$ e una singolarità essenziale in $(-2i)$ con $\mathrm{res}(f, -2i) = \pi$.

Soluzioni scritto del 22/1/99

1. T è ben definito da $C^0([0,1])$ in $C^0([0,T])$, anche se ovviamente non è lineare. Per il punto (ii), osserviamo che
$$\|Tu - T0\|_X = \max_{0\le t\le 1} |e^{u(t)} - 1| \le e^{\|u\|_X} \|u\|_X$$
grazie al teorema del valor medio, e l'ultimo termine tende a 0 per $\|u\|_X \to 0$. Dunque T è continuo in 0 e inoltre trasforma sottoinsiemi limitati di X in insiemi limitati di X. Non vale invece la (iv) (e^x è un infinito di ordine superiore a ogni retta del tipo Lx, per $x \nearrow +\infty$). Se invece $X = L^1([0,1])$, T non è ben definito in quanto esistono funzioni $u \in L^1([0,1])$ tali che $Tu \notin L^1([0,1])$ (ad esempio, $u(t) = t^{-1/2}$).

2. M è uno spazio vettoriale in quanto se $u, v \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $u + v \in M$ (infatti $\sqrt{|u+v|} \le \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|}$ q.o. in $(0,1)$) e $\lambda u \in M$. D'altra parte, N non è una norma perché non verifica la proprietà di omogeneità: $N(\lambda u) \neq |\lambda| N(u)$ se $\lambda \neq 0$ e $u \neq 0$. Riguardo al punto (iii), si noti che la disuguaglianza triangolare è ancora conseguenza della disuguaglianza elementare $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\forall a,b \geq 0$.
(iv): se $u_n \to u$ in $L^1(0,1)$, allora
$$d(u_n,u) = N(u_n - u) \le \left\{\int_0^1 |u(x)|\,dx\right\}^{1/2} \left\{\int_0^1 1\,dx\right\}^{1/2} \le \|u_n - u\|_1^{1/2}$$
grazie alla disuguaglianza di Hölder.

3. Uno degli esempi più semplici ed immediati è dato dalla funzione
$$f(z) = \frac{1 - 3(z-1-i)^3}{(z-1-i)^4} + \pi e^{1/(z+2i)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1+i, -2i\}.$$

Istituzioni di Analisi Superiore

Appello del 19-3-99

1) Calcolare $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{n\left(1+\tan\frac{x}{n}\right)}\,dx$.

2) Sia (x_n) una successione debolmente convergente ad x nello spazio $C^0([0,1])$, dotato della norma del massimo (cioè: $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$).
Verificare che la successione di numeri reali $(x_n(t))$ converge a $x(t)$, per ogni $t \in [0,1]$.
L'affermazione resta vera se in $C^0([0,1])$ si considera la norma: $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|\,dt$?

3) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ intera. Si dimostri che se esistono $\varepsilon > 0$ e $w \in \mathbb{C}$ tali che $|f(z) - w| \geq \varepsilon$, $\forall z \in \mathbb{C}$, allora f è costante.

Soluzioni scritto del 19 marzo 1999

1) Sia $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n(1+\tan\frac{x}{n})}$; in $[0, \frac{\pi}{2}]$ si ha

$|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$. Per il teorema della convergenza dominata il limite è nullo.

2) Per ogni $t \in [0,1]$, l'applicazione $\delta_t : x \to x(t)$ è un funzionale lineare e continuo. Se dunque $x_n \rightharpoonup x$, $\langle \delta_t, x_n \rangle \to \langle \delta_t, x \rangle$, $\forall t \in [0,1]$.

L'affermazione non è vera se in $C^0([0,1])$ si considera la seconda norma. Si consideri per questo $x_n(t) = t^n$; $\|x_n\|_1 \to 0$, dunque $x_n \to 0$; ma $x_n(1) = 1 \not\to 0$.

3) Se $|f(z) - w| \geq \varepsilon$, $\forall z \in \mathbb{C}$, allora

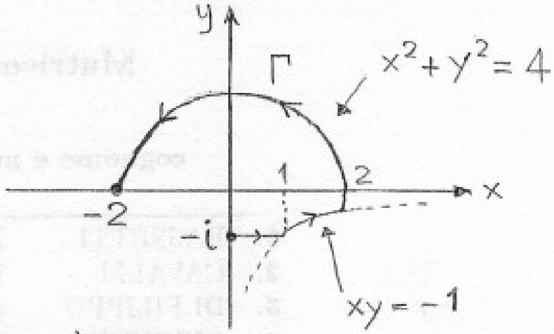
$g(z) = f(z) - w$ non si annulla in $\mathbb{C}$. Dunque $\frac{1}{g}$ è una funzione intera ed è limitata, perché $\dfrac{1}{|g(z)|} = \dfrac{1}{|f(z)-w|} \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Pertanto $\frac{1}{g}$ è costante, dunque g e di conseguenza f sono costanti.

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Scritto d'esame del 4 giugno 1999

1. Scegliendo il procedimento che vi è più congeniale, calcolare il valore dell'integrale



$$\int_\Gamma \cos z \, dz$$

dove Γ è il cammino del piano complesso indicato in figura (composto dunque da un segmento, più un arco di iperbole, più un arco di circonferenza), che parte dal punto $-i$ e arriva al punto -2.

2. Sia Ω un aperto non vuoto e limitato di $\mathbb{R}^N$ e sia $\{f_n\}$ una successione convergente a f q.o. in Ω. Provare che $\tanh(f_n) \longrightarrow \tanh(f)$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, \infty)$; mostrare invece con un esempio che $\tanh(f_n) \not\longrightarrow \tanh(f)$ in $L^\infty(\Omega)$.

3. Sia $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ il quadrato aperto di lato 2 centrato nell'origine. Posto $X = L^1(Q)$, trovare due elementi $f, g \in X$ tali che

$$\|f\|_X \leq 1, \quad \|g\|_X \leq 1, \quad \|f-g\|_X \geq 1, \quad \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_X = 1.$$

Lo stesso esercizio può essere risolto se $X = L^2(Q)$? E se $X = L^\infty(Q)$?

Soluzioni scritto del 4/6/1999

1. La funzione $f(z) = \cos z$ è la derivata della funzione $F(z) = \sin z$, olomorfa in $\mathbb{C}$. Dunque qualunque sia il cammino Γ che unisce i punti $-i$ e -2, si ha

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = F(-2) - F(-i) = \sin(-2) - \sin(-i)$$
$$= i \sinh(1) - \sin 2.$$

2. Grazie alla continuità della funzione tangente iperbolica, abbiamo che $(\tanh(f_n) - \tanh(f)) \longrightarrow 0$ q.o. in Ω. D'altra parte, $|\tanh(f_n) - \tanh(f)|^p \leq 2^p \quad \forall\, p \geq 1$ e Ω ha misura finita, per cui è sufficiente applicare il teorema di Lebesgue per concludere che $\tanh(f_n) \to \tanh(f)$ in $L^p(\Omega)$. Siano ora $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subseteq \Omega$. Posto $\Omega_n = B(x_0, \frac{r}{n})$ e $f_n = \chi_{\Omega_n}$, si verifica facilmente che $\tanh(f_n) \to 0$ q.o. in Ω ma $\|\tanh(f_n) - 0\|_\infty = 1 \quad \forall\, n \geq 1$.

3. Posto $Q_1 = (0,1) \times (0,1)$ e $Q_2 = (-1,0) \times (-1,0)$, basta prendere $f = \chi_{Q_1}$ e $g = \chi_{Q_2}$. Si ha allora $\|f\|_1 = 1$, $\|g\|_1 = 1$, $\|f - g\|_1 = \mu(Q_1 \cup Q_2) = 2$ $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_1 = \frac{1}{2}(\mu(Q_1) + \mu(Q_2)) = 1$. Se $X = L^2(Q)$, non è possibile trovare una coppia di funzioni in queste condizioni perché L^2 è uniformemente convesso. Se invece $X = L^\infty(Q)$, un esempio è fornito da $f = 1$, $g = \chi_{Q_1}$.

<u>Istituzioni di Analisi Superiore</u> 9-7-99

1) In $\mathbb{C}$ sia γ il cammino $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$ con
$x(t) = 3\cos t$
$y(t) = 2\sin t$
$t \in [0, 2\pi]$. Calcolare gli integrali

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z}\, dz$, (ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{1-z}\, dz$.

2) Siano $\mathcal{B}$ la famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$, λ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, (x_n) e (p_n) $(n = 1, 2, \dots)$ due successioni di numeri reali con $\sum_{n=1}^{+\infty} |p_n| < +\infty$. Per $E \in \mathcal{B}$, si definisca $\nu(E) = \sum_{x_n \in E} p_n$.
Si verifichi che ν è una misura relativa finita su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ e si calcoli $\dfrac{d\nu}{d\lambda}$.

3) Sia λ la misura di Lebesgue n-dimensionale. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\lambda(\Omega) < +\infty$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, w, v, v_n $(n = 1, 2, \dots)$ funzioni λ-misurabili e tali che $w \in L_2(\Omega)$, $f \circ v_n \in L_2(\Omega)$, $\forall n$. Si supponga che $v_n \to v$ λ-q.o. e $f \circ v_n \to w$ in $L_2(\Omega)$. Verificare che:
(i) $f \circ v_n \to f \circ v$ λ-quasi uniformemente in Ω.
(ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_\varepsilon \subseteq \Omega$ con $\lambda(N_\varepsilon) < \varepsilon$ e $f \circ v_n \to f \circ v$ in $L_2(\Omega \setminus N_\varepsilon)$.
(iii) $f \circ v = w$ λ-q.o. in Ω.

Soluzioni scritto del 9 luglio 1999

1) Ricordando la formula di Cauchy $g(z)=\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Ind}_\gamma(z)\int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}\,dw$, si ha

(i) $\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z}\,dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z-0}\,dz = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i$.

(ii) $\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{1-z} = -2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z-1}\,dz = -2\pi i\cdot 3 = -6\pi i$.

2) La σ-additività di ν è garantita da $\sum_{n=1}^{+\infty}|p_n|<+\infty$.
Poiché $\mathbb{R}=(\mathbb{R}\setminus(x_n))\cup(x_n)$ e $\nu(\mathbb{R}\setminus(x_n))=0$, $\lambda((x_n))=0$ si ha che λ e ν sono singolari e pertanto $\frac{d\nu}{d\lambda}=0$.

3) (i) Esiste $N\subseteq\Omega$ tale che $\lambda(N)=0$ e $v_n(x)\to v(x)$, $\forall x\in\Omega\setminus N$.
Per la continuità di f, $f\circ v_n(x)\to f\circ v(x)$, $\forall x\in\Omega\setminus N$.
Poiché $\lambda(\Omega)<+\infty$, da $f\circ v_n\to f\circ v$ λ-q.o. segue $f\circ v_n\to f\circ v$ λ-quasi uniformemente in Ω.

(ii) Da (i) segue: $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_\varepsilon\subseteq\Omega$ tale che $\lambda(N_\varepsilon)<\varepsilon$ e $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\Omega\setminus N_\varepsilon}|f\circ v_n(x)-f\circ v(x)|=0$. Pertanto $\|f\circ v_n-f\circ v\|_{L_2(\Omega\setminus N_\varepsilon)}\to 0$, poiché $\|f\circ v_n-f\circ v\|^2_{L_2(\Omega\setminus N_\varepsilon)}=\int_{\Omega\setminus N_\varepsilon}|f\circ v_n(x)-f\circ v(x)|^2\,d\lambda\le\sup_{x\in\Omega\setminus N_\varepsilon}|f\circ v_n(x)-f\circ v(x)|^2\lambda(\Omega\setminus N_\varepsilon)$

(iii) Siano $\varepsilon_k=\frac{1}{k}$ e N_{ε_k} come in (ii) $(k=1,2,\dots)$. Per ogni k si ha: $f\circ v_n\to f\circ v$ in $L_2(\Omega\setminus N_{\varepsilon_k})$ dunque $f\circ v_n\to f\circ v$ in $L_2(\Omega\setminus N_{\varepsilon_k})$, ma $f\circ v_n\to w$ in $L_2(\Omega\setminus N_{\varepsilon_k})$, dunque $f\circ v=w$ λ-q.o. in $\Omega\setminus N_{\varepsilon_k}$ cioè esiste M_k con $\lambda(M_k)=0$ e $f\circ v(x)=w(x)$, $\forall x\in\Omega\setminus(N_{\varepsilon_k}\cup M_k)$. Sia $N=\bigcap_{k=1}^{\infty}(N_{\varepsilon_k}\cup M_k)$. Allora $\lambda(N)=0$ e $f\circ v(x)=w(x)$, $\forall x\in\Omega\setminus N$.

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Scritto d'esame del 28/9/99

1. Data la funzione di variabile complessa
$$f(z) = \sin\frac{1}{z} - \cos(2z+3) - e^{1/z} + (1-z)^5,$$
provare che $\int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni cammino chiuso γ del piano complesso non passante per l'origine.

2. Sia Ω un aperto non vuoto e limitato di $\mathbb{R}^N$. Posto, per $\lambda > 0$,
$$\varphi_\lambda(s) = \begin{cases} |s|^{\lambda-1} s & \text{se } s \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0 & \text{se } s = 0 \end{cases},$$
e fissata $u \in L^1(\Omega)$, si consideri la funzione reale
$$\Phi_\lambda(r) = \int_\Omega \varphi_\lambda(u(x) - r)\, d\mu, \quad r \in \mathbb{R},$$
dove μ denota la misura N-dimensionale di Lebesgue.

(i) Per quali λ la funzione Φ_λ è ben definita?

(ii) Fissato $\lambda = 1/2$, calcolare i limiti $\lim_{r\to-\infty} \Phi_\lambda(r)$ e $\lim_{r\to+\infty} \Phi_\lambda(r)$.

(iii) Sempre per $\lambda = 1/2$, provare che esiste uno ed un solo punto $r \in \mathbb{R}$ tale che $\Phi_\lambda(r) = 0$.

3. Posto $X = \{ f \in C^1(\mathbb{R}) : \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0 \}$, si provi che
$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$$
e
$$\|f\|_* = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$$
sono due norme in X e che $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ non sono equivalenti.

Soluzioni scritto del 28 settembre 1999

1. Siccome 0 è l'unica singolarità isolata della funzione f e inoltre il residuo di f in 0 vale 0, la tesi è una facile conseguenza del teorema dei residui.

2. Notato che per ogni $\lambda > 0$ la funzione φ_λ è continua in $\mathbb{R}$, osserviamo che $|\varphi_\lambda(u(x)-r)| \leq 1 + |u(x)-r|$ se $0 < \lambda \leq 1$.
   (i) Dunque Φ_λ è ben definita se $0 < \lambda \leq 1$, mentre per $\lambda > 1$ non è detto che la funzione $|\varphi_\lambda(u(x)-r)| = |u(x)-r|^\lambda$ sia sommabile nella sola ipotesi di $u \in L^1(\Omega)$.
   (ii) Siccome φ_λ è strettamente crescente, abbiamo che $\lim_{r\to-\infty} \Phi_\lambda(r) = +\infty$ e $\lim_{r\to+\infty} \Phi_\lambda(r) = -\infty$. Infatti, i limiti esistono per la monotonia di Φ_λ e sono infiniti: se, per esempio, $\lim_{r\to-\infty} \Phi_\lambda(r)$ fosse finito, il teorema di Beppo Levi applicato alla successione $\{\varphi_\lambda(u(x)+n)\}$ ($r = -n$ con $n \in \mathbb{N}$) ci permetterebbe di concludere che il limite q.o. di $\varphi_\lambda(u(x)+n)$ è finito e sommabile, mentre $\lim_{n\to\infty} \varphi_\lambda(u(x)+n) = +\infty$ per ogni $x \in \Omega$.
   (iii) La continuità di Φ_λ (in realtà, Φ_λ è anche hölderiana di esponente 1/2 come si controlla facilmente), la conclusione di (ii), e il teorema degli zeri per funzioni continue garantiscono l'esistenza dello zero per Φ_λ. L'unicità è conseguenza della stretta monotonia di Φ_λ.

3. Il controllo che $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_*$ sono norme in X è tutto di routine tranne la prova che $\|f\|_* = 0$ implica $f \equiv 0$. Ma da $\|f\|_* = 0$ segue $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, per cui f deve essere costante e l'unica costante compatibile con la definizione di X è 0. Per vedere la non equivalenza delle due norme, basta produrre un esempio di successione f_n per cui $\|f_n\|_*$ è limitata, mentre $\|f_n\| \to +\infty$. Posto $\varphi(x) = e^{-x^2+1/2}$, si può prendere $f_n(x) = n\,\varphi(\frac{x}{n})$, $x \in \mathbb{R}$, per $n = 1, 2, \ldots$

Istituzioni di Analisi Superiore 19-11-1999

1) Si consideri in $\mathbb{C}$ la funzione $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2(z-2\pi i)}$.

Se ne determinino le singolarità e i relativi residui.

2) Sia $f(x) = \begin{cases} x \log x & x \in]0,1] \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

(i) f è a variazione limitata in $[0,1]$? In caso affermativo calcolare la variazione totale di f e determinarne la decomposizione di Jordan $\left(f(x) = P(x) - N(x) \right)$.

(ii) f è assolutamente continua in $[0,1]$? Motivare la risposta.

3) In $L_2(0,1)$ sia $(e_n)_{n=1,2,\dots}$ un sistema ortonormale tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^t e_n(x)\,dx \right|^2 = t$, $\forall t \in [0,1]$.

* (i) Verificare che per ogni $t \in [0,1]$ la funzione caratteristica di $[0,t]$ appartiene allo spazio vettoriale generato dal sistema (e_n).
(Suggerimento: si calcoli $\| \chi_{[0,t]} \|^2$).

(ii) Dedurre da (i) che (e_n) è una base hilbertiana.

* Esercizio formulato male: di solito per "spazio vettoriale generato da" si intendono le combinazioni lineari finite di elementi del sistema.

Soluzioni del 19-11-1999

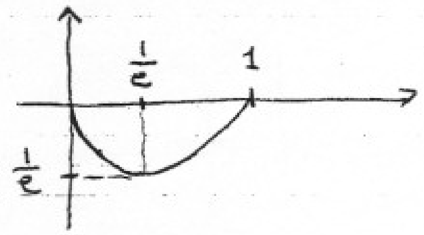
1) Singolarità: $z=0$ è uno zero semplice di e^z-1 ed è uno zero doppio di $z^2(z-2\pi i)$. Dunque $z=0$ è un polo del primo ordine per f, con $\mathrm{Res}(f,0)=\lim\limits_{z\to 0} z f(z) =$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z(z-2\pi i)} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(z-2\pi i)+z} = \frac{1}{-2\pi i} = \frac{i}{2\pi}.$$

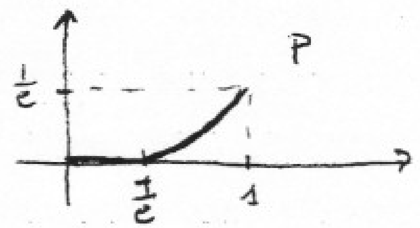
$z=2\pi i$ è uno zero semplice di e^z-1 e di $z^2(z-2\pi i)$. Dunque $z=2\pi i$ è una singolarità eliminabile per f con $\mathrm{Res}(f,2\pi i)=0$

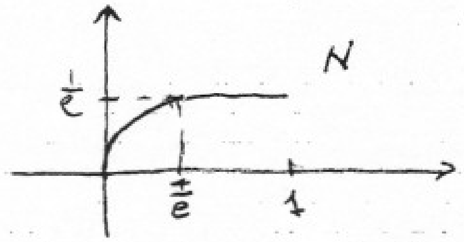
2) In $]0,1]$ si ha $f'(x)=\log x+1$, $f''(x)=\frac{1}{x}$. Inoltre $\lim\limits_{x\to 0} x\log x=0$.

Pertanto il grafico di f è il seguente. Dunque f è a variazione limitata con $V_f = f(1)-f(\frac{1}{e})+f(0)-f(\frac{1}{e}) = \frac{2}{e}$



I grafici di P e N sono i seguenti





Infine f è assolutamente continua in $[0,1]$, perché si verifica facilmente che essa soddisfa, in tutto $[0,1]$, al teorema fondamentale del calcolo integrale.

3) Sia χ_t la funzione caratteristica di $[0,t]$ e sia V lo spazio vettoriale generato dalla successione (e_n).

(i) Si ha: $\|\chi_t\|^2 = \int_0^t 1\,dt = t = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\int_0^t e_n(x)\,dx\right|^2 =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\int_0^1 e_n(x)\chi_t(x)\,dx\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n,\chi_t)|^2.$$ Da qui $\chi_t = \sum_{n=1}^{\infty} (\chi_t, e_n) e_n$.

(ii) Si tratta di verificare che $\overline{V} = L_2(0,1)$. Questo è equivalente a dimostrare che l'unico vettore ortogonale a V è il vettore nullo. Sia dunque $g\in L_2(0,1)$ ortogonale a V. Allora $\forall t\in[0,1]$ si ha $0=(g,\chi_t)=\int_0^t g(x)\,dx=0$. Ne segue $g=0$ q.o. in $[0,1]$.

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Scritto d'esame del 21 gennaio 2000

1. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{4}{\pi} z^4 \sin\frac{i}{z}\, dz$$

dove γ è il cammino definito da

$$\gamma(t) = 6e^{i\pi t}, \qquad -\frac{7}{2} \le t \le \frac{13}{2}.$$

2. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$ che contiene l'origine $O = (0,0)$. Sia inoltre $\{g_n : \Omega \to \mathbb{R}\}$ una successione di funzioni misurabili tali che

$$0 \le g_n(x_1, x_2) \le 5(n|x|)^{-3/2} \qquad \text{per q.o. } x = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Utilizzando risultati noti, dedurre che la serie (di funzioni) $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge q.o. a una funzione $s : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile. Si può concludere qualcosa relativamente alla sommabilità di s in Ω?

3. Nello spazio $X = L^2(\mathbb{R})$ si consideri il funzionale

$$\langle f, x \rangle := \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) x(t)\, dt.$$

Provare che f è ben definito, lineare e continuo da X in $\mathbb{R}$. Sapreste indicare (senza svolgere il calcolo dell'integrale risultante) il valore di $\|f\|_{X'}$?

Soluzioni scritto del 21 gennaio 2000

1. Si riconosce facilmente che 0 è una singolarità essenziale per la funzione

$$f(z) := \frac{4}{\pi} z^4 \sin\frac{i}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n i^{2n+1}}{\pi(2n+1)!\, z^{2n-3}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

e che $\mathrm{Res}(f,0) = \frac{4i^5}{\pi\, 5!} = \frac{i}{30\pi}$. D'altra parte, γ è un cammino chiuso che compie 5 giri intorno al punto 0 in senso antiorario, per cui $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 5$. Applicando allora il teorema dei residui, si trova

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{i}{30\pi} \cdot 5 = -\frac{1}{3}.$$

2. Si noti che la funzione $x \longmapsto 5|x|^{-3/2}$ è sommabile in Ω in quanto risulta sommabile in ogni palla B_r di centro 0 e raggio $r>0$ (basta passare a coordinate polari e controllare che

$$\int_{B_r} 5|x|^{-3/2}\,d\mu = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r \frac{5}{\rho^{1/2}}\,d\rho\right)d\theta < +\infty \Big).$$

Dunque, anche le funzioni g_n sono sommabili in Ω. Siccome poi la serie numerica $\sum_1^\infty n^{-3/2}$ converge, applicando il teorema di Beppo Levi alla successione delle ridotte $\sum_{k=1}^{m} g_k(x)$, si conclude che la somma della serie $s(x)$ è una funzione sommabile e che

$$\int_\Omega s(x)\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega g_n(x)\,d\mu.$$

3. Il funzionale f è ben definito in quanto la funzione $h(t) := \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$, $t>0$, appartiene a $L^2(0,+\infty)$. Infatti, $h(t) \sim \frac{1}{t}$ per $t \to +\infty$, mentre $h(t) = \ln(t+1) - \ln t \sim -\ln t$ per $t \to 0^+$ ed è ben noto che $|\ln t|^\alpha \in L^1(0,1)$ $\forall\ \alpha > 0$. D'altra parte, se $x \in X$ si ha evidentemente $x|_{(0,+\infty)} \in L^2(0,+\infty)$. La linearità è evidente, mentre la continuità scende ad esempio dalla seguente disuguaglianza

$$|\langle f, x\rangle| \leq \left(\int_0^{+\infty} \left|\ln\left(1+\tfrac{1}{t}\right)\right|^2 dt\right)^{1/2} \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Ricordando infine il teorema di rappresentazione di Riesz, si riconosce facilmente che

$$\langle f, x\rangle = (h\chi_{(0,+\infty)}, x) \quad \forall x \in X,$$

dove $(\cdot,\cdot)$ denota il prodotto scalare nello spazio di Hilbert $X = L^2(\mathbb{R})$ e $\chi_{(0,+\infty)}$ è la funzione caratteristica della semiretta $(0,+\infty)$. Il teorema di Riesz ci permette allora di concludere proprio che

$$\|f\|_{X'} = \left(\int_{\mathbb{R}} |h(t)\chi_{(0,+\infty)}(t)|^2\,dt\right)^{1/2} = \sqrt{\int_0^{+\infty} \left|\ln\left(1+\tfrac{1}{t}\right)\right|^2 dt}.$$

Più brevemente, si poteva subito osservare che $h\chi_{(0,+\infty)}$ è una funzione di $L^2(\mathbb{R})$ ed applicare il teorema di Riesz.

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

24 - 3 - 2000

1) Siano $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (cioè f e g siano funzioni intere).

Si supponga che $|f(z)| \leq |g(z)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$, e inoltre che:

(i) g non si annulli mai.

(ii) g abbia un numero finito di zeri.

(iii) g abbia un'infinità numerabile di zeri.

Che cosa si può concludere, nei vari casi, su f?

2) Per $r \in \mathbb{R}$, sia $[r]$ la parte intera di r.

Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid [x+y] = 2\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y-[x+y] = \frac{1}{2}\}$.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = x+y$.

(i) Calcolare $\lambda(A)$ e $\lambda(B)$, dove λ è l'usuale misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$.

(ii) Per quali $p \in [1, +\infty]$, $f \in L_p(A)$?

Per quali $p \in [1, +\infty]$, $f \in L_p(B)$?

3) In $L_2(0, 2\pi)$ si consideri la base hilbertiana

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1,2,\dots}$$

Determinare lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = \cos 2x + 4 - 6 \sin x \cos x$.

Soluzioni 24 - 3 - 2000

1) (i) $\dfrac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{f(z)}{g(z)} = \text{costante} =: \lambda \Rightarrow$

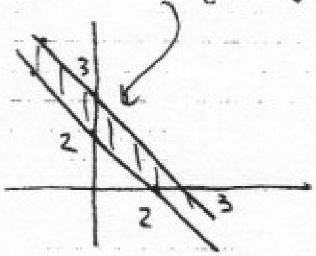
$f = \lambda g$ -

(ii) e (iii) Siano $z_1, z_2, \dots z_k, \dots$ gli zeri di g -

In $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\}$ si ha

$\dfrac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq 1$ - Dunque $z_1, z_2, \dots z_k, \dots$ sono singolarità eliminabili per $\dfrac{f}{g}$ - Di nuovo si conclude $f = \lambda g$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

2) (i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x+y < 3\}$ -



Dunque $\lambda(A) = +\infty$ -

$B = \{(x,y) \mid x+y = h + \frac{1}{2} \text{ con } h \in \mathbb{Z}\}$ - Dunque B è costituito da un'infinità numerabile di rette -
Pertanto $\lambda(B) = 0$ -

(ii) $p \neq +\infty$ $f(x,y) \geq 2$, dunque $f \notin L_p(A)$ (perchè $\lambda(A) = +\infty$) -
$p = \infty$ $2 \leq f(x,y) \leq 3$, dunque $f \in L_\infty(A)$ -
$\lambda(B) = 0$, dunque $f \in L_p(B)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$ -

3) $-6 \sin x \cos x = -3 \sin 2x$ -

$$f(x) = 4 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - 3 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\pi} \, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} -$$

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Scritto d'esame del 9 giugno 2000

1. Calcolare, utilizzando il metodo dei residui, il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\sin t}.$$

2. Provare che la funzione d'insieme

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{2-n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) \delta_n,$$

dove δ_n indica la misura di Dirac centrata in $n \in \mathbb{N}$, è una misura relativa in $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ con $\mathcal{B}$ famiglia dei boreliani. Trovare una decomposizione di Hahn di $\mathbb{R}$ per ν. La misura ν è finita? È assolutamente continua rispetto alla misura λ di Lebesgue?

3. Indicato con $\ell^{(p)}$ l'usuale spazio complesso delle successioni $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ tali che $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ se $1 \le p < \infty$, $\sup_n |x_n| < \infty$ se $p = \infty$, e dati $y \in \ell^{(4)}$, $z \in \ell^{(3)}$, si chiede per quali p la successione

$$yz = (y_1 z_1, y_2 z_2, \dots, y_n z_n, \dots)$$

appartiene ad $\ell^{(p)}$ [Suggerimento: utilizzare la disuguaglianza di Young].

Soluzioni scritto del 9 giugno 2000

1. Ricordando la formula $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, si osservi che

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\sin t} = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}dt}{6ie^{it}+e^{2it}-1} = \int_\gamma \frac{2}{6iz+z^2-1}dz$$

dove γ denota la circonferenza di raggio unitario percorsa una volta in senso antiorario. Ora la funzione $f(z) = \dfrac{2}{6iz+z^2-1}$ ha due poli semplici in $(-3 \pm 2\sqrt{2})i$, di cui uno solo, $(-3+2\sqrt{2})i$, è situato all'interno del cerchio racchiuso da γ. Abbiamo dunque

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\sin t} = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f; -3i+2\sqrt{2}i)$$
$$= 2\pi i \frac{2}{2\cdot 2\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2. Si verifica facilmente che $\nu(\emptyset)=0$; inoltre $|\nu(A)| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{2-n}+\frac{1}{n^2}\right) < +\infty$ per ogni $A \in \mathcal{B}$ e ν è σ-additiva come tutte le δ_n, $n\in\mathbb{N}$. Si controlla poi a mano che

$$\nu(\{n\}) > 0 \quad \text{per } n \le 8 \text{ o } n \text{ pari},$$
$$\nu(\{n\}) < 0 \quad \text{per } n \ge 9 \text{ dispari}.$$

Pertanto una decomposizione di Hahn di $\mathbb{R}$ per ν potrebbe essere $A = \{1,\dots,8\} \cup \{n\in\mathbb{N} : n \text{ pari}\}$, $B = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}) \cup \{n\in\mathbb{N} : n \text{ dispari}\}$, per esempio.

Inoltre, la misura ν è finita ma non assolutamente continua rispetto a λ, anzi è λ-singolare in quanto

$$\lambda(\mathbb{N}) = 0 \qquad \text{e} \qquad \nu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}) = 0.$$

3. Ci chiediamo per quali $p \ge 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p |z_n|^p$$

converge. Usando la disuguaglianza di Young con $q\in(1,\infty)$, si ha

$$|y_n|^p|z_n|^p \le \frac{|y_n|^{pq}}{q} + \frac{|z_n|^{pq'}}{q'}$$

con $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. Se $pq=4$ e $pq'=3$, allora $\frac{1}{q}=\frac{p}{4}$, $\frac{1}{q'}=\frac{p}{3}$ e $\frac{p}{4}+\frac{p}{3}=1$, da cui $p=\frac{12}{7}$.

Pertanto si conclude facilmente che

$$yz \in \ell^{(p)} \qquad \forall\, p\in\left[\tfrac{12}{7},\infty\right];$$

infatti è ben noto che $\ell^{(r)} \subseteq \ell^{(s)}$ ogni volta che $1\le r\le s\le\infty$. Viceversa, se $p<\frac{12}{7}$, si controlla che

$$y = \left(1, \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\alpha/4}, \dots, \left(\tfrac{1}{n}\right)^{\alpha/4}, \dots\right),$$
$$z = \left(1, \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\alpha/3}, \dots, \left(\tfrac{1}{n}\right)^{\alpha/3}, \dots\right),$$

con $\alpha = \frac{12}{7p} > 1$, stanno in $\ell^{(4)}$ ed $\ell^{(3)}$, rispettivamente, ma $yz = \left(1, \dots, \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p}, \dots\right) \notin \ell^{(p)}$.

Istituzioni di Analisi Superiore

11 luglio 2000

1) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n dx$.

2) Siano H uno spazio di Hilbert e (x_n) una successione di vettori in H a due a due ortogonali.

Verificare che sono equivalenti:

(i) $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ è convergente.

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ è debolmente convergente.

(iii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|^2 < +\infty$.

3) Data la funzione $f(z) = \frac{1}{10} e^{\frac{1}{z-2}} + z^3$, studiarne le singolarità e dire quanti zeri (contati con la loro molteplicità) ha nel disco $\{|z|<1\}$ (Suggerimento: usare il teorema di Rouché).

SOLUZIONI 11-7-2000

1) $$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n dx = 2\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx$$

$$= 2\int_0^1 \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx = 2\int_0^1 e^x dx = 2[e-1].$$

per il teorema della convergenza dominata
o per il teorema di Beppo Levi

2) i) ⇒ ii): ovvio

ii) ⇒ iii): sia $s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$, allora $\|s_k\|^2 = \sum_{n=0}^{k}\|x_n\|^2$.

Poichè $\sum x_n$ è debolmente convergente, (s_k) è limitata in norma, dunque $\exists\, C>0$ t.c. $\|s_k\|^2 = \sum_{n=0}^{k}\|x_n\|^2 \le C$. Ne segue $\sum\|x_n\|^2<\infty$.

iii) ⇒ i): è sufficiente verificare che (s_k) è di Cauchy. Ciò è verificato, poichè $\|s_k - s_\ell\|^2 = (x_{\ell+1}+\dots+x_k,\ x_{\ell+1}+\dots+x_k) = \sum_{n=\ell+1}^{k}\|x_n\|^2$.

3) $z=2$ singolarità essenziale con $\mathrm{Res}(f,2)=\frac{1}{10}$.

Sia $g(z)=z^3$. Allora $|f(z)-g(z)| = \frac{1}{10}\left|e^{\frac{1}{z-2}}\right| \le$
$\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{|z-2|^n\cdot n!} \le \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \frac{e}{10}$ per $|z|=1$ (perchè, per $|z|=1$, $|z-2|\ge 1$). Per il teorema di Rouché f ha tre zeri nel disco $\{|z|<1\}$.

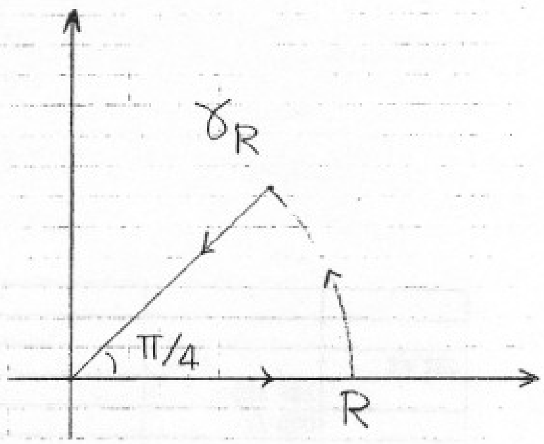
ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Scritto d'esame del 22 settembre 2000

1. Indicato con $\ell^{(p)}$ lo spazio delle successioni complesse introdotto nel modo usuale, sia $T : \ell^{(1)} \to \ell^{(\infty)}$ definito da
$$(Tx)_n = \sum_{k=n}^{\infty} x_k , \qquad x = (x_1, x_2, \dots).$$
(i) Provare che l'operatore T è ben definito, lineare e continuo. Calcolarne la norma.
(ii) T è iniettivo e/o suriettivo?

2. Nello spazio misurabile $\left([0,1]; \mathcal{P}([0,1])\right)$ si consideri la funzione d'insieme
$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}_A} \frac{1}{3^n} , \quad A \in \mathcal{P}([0,1]), \ \mathbb{N}_A := \left\{k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} \in A\right\}.$$
(i) Provare che μ è una misura e calcolare $\mu([0,1])$.
(ii) Calcolare, giustificando i passaggi, $\lim_{k \to +\infty} \int_{[0,1]} (1+x^k)\, d\mu$.

3. Sia γ_R il cammino chiuso rappresentato in figura, dove $R \in (0,+\infty)$.



(i) Calcolare, nel modo che preferite, $\int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz$ al variare di $R > 0$.
(ii) Detto C_R l'arco di circonferenza che fa parte del circuito γ_R, provare che $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = 0$
[Sugg.: può essere utile notare che $\sin(2t) \geq \frac{4t}{\pi} \ \forall\, t \in [0, \frac{\pi}{4}]$].
(iii) Ricordando che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e utilizzando le conclusioni di (i) e (ii), calcolare il valore di
$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx .$$

Soluzioni scritto del 22/9/2000

1. (i) T è ben definito in quanto, se $x \in \ell^{(1)}$, allora

$$|(Tx)_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|_1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque $Tx \in \ell^{\infty}$ con $\|Tx\|_\infty \leq \|x\|_1$. La linearità di T scende dalla linearità delle serie, per cui la continuità si ha subito dalla disuguaglianza precedente con $\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^{(1)}, \ell^{(\infty)})} \leq 1$. In realtà la norma vale proprio 1: basta infatti prendere $x \in \ell^{(1)}$ con $x_k > 0$ $\forall k$ per avere

$$\|Tx\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{\infty} x_k \right| = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \|x\|_1 .$$

(ii) T è iniettivo in quanto $Tx = 0 \iff \sum_{k=n}^{\infty} x_k = 0 \ \forall n$

$$\iff x_n = \sum_{k=n}^{\infty} x_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = 0 \quad \forall n \iff x = 0.$$

D'altra parte T non è suriettivo: basta infatti osservare che una successione $y = (y_n)$ limitata ma non infinitesima non ammette controimmagini in $\ell^{(1)}$ (se $x \in \ell^{(1)}$, Tx è tale che $\lim_{n\to\infty} (Tx)_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} x_k = 0$).

2. (i) μ è chiaramente una misura. La σ-additività si verifica facilmente utilizzando la proprietà di riordinamento per le serie convergenti a termini positivi o, meglio ancora, per le somme infinite convergenti. Infatti, una qualunque somma infinita del tipo $\sum_{n \in \mathbb{N}_A} \frac{1}{3^n}$, $A \in \mathcal{P}([0,1])$ è convergente in quanto

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \mu([0,1]) = \frac{1}{3} \, \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

il che ci dice anche che μ è finita.

(ii) Si osservi che le funzioni $f_k(x) = 1 + x^k$, $k \in \mathbb{N}$, sono tutte misurabili su $([0,1], \mathcal{P}([0,1]))$ (e come potrebbe essere altrimenti con la σ-algebra $\mathcal{P}([0,1])$?) e limitate, con $|f_k(x)| \leq 2$ $\forall x \in [0,1]$. Siccome le f_k convergono puntualmente alla funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$, il teorema di Lebesgue ci permette di concludere che

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} (1 + x^k)\, d\mu = \int_{[0,1]} f(x)\, d\mu = \mu([0,1[) + 2\mu(\{1\})$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Siccome c'è anche una convergenza monotona della successione $\{f_k\}$, alternativamente si poteva usare il teorema di Beppo Levi.

3. (i) Siccome $f(z) = e^{iz^2}$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ e γ_R è chiuso, allora il teorema di Cauchy ci assicura che $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$ per ogni $R > 0$.

(ii) Si ha $\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2it}} iRe^{it}\, dt$ con

$$\left| e^{iR^2e^{2it}} iRe^{it} \right| \leq Re^{-R^2 \sin(2t)} \leq Re^{-\frac{4}{\pi}tR^2},$$

per cui

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \leq \int_0^{\pi/4} Re^{-\frac{4}{\pi}tR^2} dt = \frac{\pi}{4R} \int_0^{R^2} e^{-s} ds$$

$$\leq \frac{\pi}{4R} \int_0^{+\infty} e^{-s} ds \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 .$$

(iii) Grazie a (i), (ii) possiamo dedurre che

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{ir^2 e^{2i(\pi/4)}} e^{i\frac{\pi}{4}} dr$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^R e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i).$$

Istituzioni di Analisi Superiore 17 - 11 -

1) Sia $\varphi_n(x) = \dfrac{nx^2+2}{nx^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ -

Dimostrare che:

a) $\forall f \in L_2(\mathbb{R})$ $\varphi_n f \longrightarrow f$ fortemente in $L_2(\mathbb{R})$ -

b) se $f_n \rightharpoonup f$ debolmente in $L_2(\mathbb{R})$, allora $f_n \varphi_n \rightharpoonup f$ debolmente in $L_2(\mathbb{R})$ -

2) Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{C}$ - Determinare le funzioni $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f = u + iv$, tali che $u = v^2$ -

3) Determinare la misura bidimensionale di Lebesgue dell'insieme

$$A = \left\{ (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \;\middle|\; \cos(x+y) \leq \frac{1}{2} \text{ e } \frac{x+y}{\pi} \in \mathbb{Q} \right\} -$$

Soluzioni 17 - 11 - 2000

1) a) $\varphi_n \in L_\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi_n f \in L_2(\mathbb{R})$ e $\|\varphi_n f - f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} =$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{nx^2+2}{nx^2+1} - 1 \right)^2 |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(nx^2+1)^2} |f(x)|^2 dx .$$

Poichè $\frac{|f(x)|^2}{(nx^2+1)^2} \to 0$ e $\frac{|f(x)|^2}{(nx^2+1)^2} \leq |f(x)|^2$, per il teorema della convergenza dominata si conclude $\|\varphi_n f - f\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0$.

b) Si deve dimostrare che, $\forall h \in L_2(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} f_n \varphi_n h \to \int_{\mathbb{R}} fh$.
Ma $\int_{\mathbb{R}} f_n \varphi_n h = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n h \cdot f_n = (\varphi_n h, f_n)$. Poichè $\varphi_n h \to h$ per il punto a) e $f_n \rightharpoonup f \Rightarrow (\varphi_n h, f_n) \to (h, f) = \int_{\mathbb{R}} f \cdot h$.

2) Usando le condizioni di Cauchy-Riemann si ha $u_x = 2v \cdot v_x = v_y$ e $-u_y = -2v v_y = v_x$. Sostituendo si ha $v_y = -4v^2 v_y$. Se $\exists (x_0, y_0)$ t.c. $v_y(x_0, y_0) \neq 0$, si ha $-4v^2(x_0, y_0) = 1$, ciò che è assurdo. Dunque $\forall (x, y)$ si ha $v_y(x, y) = 0$; ne segue $v_x(x, y) = 0$ e dunque $v(x, y) = \lambda \in \mathbb{R}$. Pertanto $f(z) = \lambda^2 + i\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) L'insieme degli $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\frac{x+y}{\pi} \in \mathbb{Q}$ è costituito da una infinità numerabile di rette e dunque ha misura nulla. Ne segue che l'insieme A ha esso pure misura nulla.

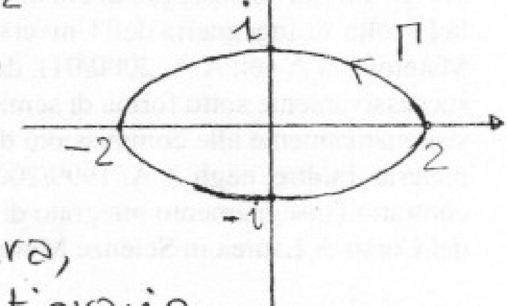
ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

Scritto d'esame del 26 gennaio 2001

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2z-3)^{-n}}{n^{n \tanh n}} + \sum_{n=3}^{+\infty} 4^{-n} (z \arctan n)^n$$

(i) Determinare un aperto connesso Ω in cui è definita la funzione f e dire se f è olomorfa in Ω.



(ii) Calcolare $\int_\Gamma f(z)dz$ dove Γ è l'ellisse indicata in figura, percorsa una volta in senso antiorario.

Richiamare la definizione di convergenza quasi uniforme e, indicato con Q il seguente quadrato in $\mathbb{R}^2$

$$Q := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, \ -1 \le y \le 1 \}$$

dare un esempio di successione di funzioni $f_n : Q \to \mathbb{R}$ che converge quasi uniformemente ma non uniformemente

3. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^3$ e sia $\{u_n\}$ una succe di funzioni in Ω tali che $0 \le u_n \le u_{n+1}$ q.o. in Ω per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siano inoltre $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzi misurabile e $v \in L^2(\mathbb{R})$ tali che

(1) $u_n \to u$ q.o. in Ω;

(2) $u_n \to v$ debolmente in $L^2(\Omega)$.

Utilizzando le informazioni date da (2) e da (1),

(i) provare che $u \in L^2(\Omega)$;

(ii) dimostrare che $u_n \to u$ fortemente in $L^2(\Omega)$;

(iii) dedurre che $v = u$.

Soluzioni scritto del 26/01/01

1. (i) La funzione è somma di due serie di potenze di cui la prima è del tipo di Laurent. La prima serie ha raggio di convergenza infinito in quanto

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{-n}}{n^{n\tanh n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} e^{-\tanh n \ln n} = 0,$$

per cui converge per ogni $z \neq 3/2$. La seconda serie ha raggio di convergenza $\frac{8}{\pi}$, e dunque

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 8/\pi ,\ z \neq 3/2 \}.$$

Ovviamente f è olomorfa in Ω.

(ii) Per calcolare $\int_\Gamma f(z)\,dz$, basta applicare il teorema dei residui tenendo presente che f ha una singolarità essenziale in $3/2$ per cui $\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 3/2) = \pi i$.

2. Basta prendere, ad esempio, $f_n(x,y) = |x|^n$ che converge a zero quasi uniformemente ($\forall \varepsilon > 0$ si può fissare $Q_\varepsilon = \{(x,y) \in Q : -1 + \frac{\varepsilon}{8} \leq x \leq 1 - \frac{\varepsilon}{8}\}$ tale che $f_n \to 0$ unif. in Q_ε e $\mu(Q \setminus Q_\varepsilon) < \varepsilon$), ma non uniformemente ($f_n(x,y) = 1$ per $x = \pm 1$, $\forall y$, $\forall n$).

3. (i) La (2) implica $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$ limitata, per cui $\exists\, C > 0$ tale che $\int_\Omega |u_n|^2 d\mu \leq C$ $\forall n$. Il teorema di Beppo Levi garantisce allora che $u \in L^2(\Omega)$ e $\int_\Omega (u_n)^2 d\mu \nearrow \int_\Omega u^2 d\mu$.

(ii) Basta notare che la successione $(u-u_n)^2$ è monotona decrescente e converge a 0 quasi ovunque, quindi $\int_\Omega |u_n - u|^2 d\mu \longrightarrow 0$ ancora grazie a Beppo Levi.

(iii) Siccome la convergenza forte implica quella debole, il limite forte u e il limite debole v devono coincidere.

Istituzioni di Analisi Superiore 23 - 03 - 2001

1. Ricordando che $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \, dx = n!$,

calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos\sqrt{x} \, dx$ con metodi di variabile reale, in termini di somma di una serie.

2. Studiare le singolarità e calcolare i relativi residui di

(1) $f(z) = \left(\cos \frac{1}{z}\right)^{-1}$

(2) $f(z) = \frac{1}{e^{1/z}}$

3. Si consideri $F : L_2(0,1) \to \mathbb{R}$ dato da

$$F(f) = \sqrt{2}\int_0^{1/2} f(x)\, dx - \int_{1/2}^{1} \pi\, f(x)\, dx.$$

Si verifichi che F è lineare e continuo e se ne calcoli la norma.

Soluzioni 23-03-2001

1. $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, pertanto $e^{-x}\cos\sqrt{x} = \sum \frac{(-1)^n e^{-x}(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}$ $(x \geq 0)$. Posto $s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n e^{-x}(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}$ si ha:

$$s_N(x) \to e^{-x}\cos\sqrt{x} \quad \text{e} \quad |s_N(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{e^{-x}(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{2N} \frac{e^{-x}(\sqrt{x})^{m}}{m!} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-x}(\sqrt{x})^{m}}{m!} = e^{-x} e^{\sqrt{x}}$$

Poichè $e^{-x}e^{\sqrt{x}} \in L_1(0,+\infty)$ è lecito applicare il teorema della convergenza dominata e concludere

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} s_N(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n e^{-x} x^n}{(2n)!}\,dx$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot n! = \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$$

2. (1) $\cos\frac{1}{z} = 0 \iff \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Dunque $z_k = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ è un polo del primo ordine per f

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{1}{\cos\frac{1}{z}} \underset{\text{(Hopital)}}{=} \lim_{z\to z_k} -\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{z^2}} =$$

$= (-1)^k \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}$. Il punto $z=0$ è punto di accumulazione di poli

(2) $\frac{1}{e^{1/z}} = e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,z^n}$; $z=0$ è una singolarità essenziale con residuo -1.

3) $F(f) = \left(f, \sqrt{2}\chi_{[0,1/2]} - \pi\chi_{[1/2,1]}\right)$. Dunque F è lineare e continuo con $\|F\| = \left\|\sqrt{2}\chi_{[0,1/2]} - \pi\chi_{[1/2,1]}\right\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{\frac{2+\pi^2}{2}}$.