Vogliamo arrivare a giustificare la definizione data di integrale. Prepariamo qualche lemma

<u>Lemma 1</u>. $(A, \mathcal{E}, m)$ spazio di misura, $\{B_n\}$ succ. sottoinsiemi di A, $B \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$. Allora

1) se $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n)$ conv. $\Rightarrow$ B è m-trascurabile

2) se $x \notin B$, allora $\exists\, n_0 : x \notin B_n \;\; \forall\, n \geq n_0$.

<u>Lemma 2</u> Se $s : A \to \mathbb{R}$ è a scala ed $\varepsilon > 0$, e vale

$$\int_A |s|\, dm < \varepsilon^2,$$

allora

$$m\left(\{x \in A : |s(x)| \geq \varepsilon\}\right) < \varepsilon.$$

<u>Dim</u>. per assurdo: se $m(\{|s| \geq \varepsilon\}) \geq \varepsilon$, allora

$\int_A |s|\, dm \geq \int_{\{|s| \geq \varepsilon\}} |s|\, dm \geq \varepsilon^2$ in contrasto con

<u>Lemma 3</u>. Se $\{s_n\}$ verifica la condizione di Cauchy nella definizione $\lim_{n', n'' \to \infty} \int_A |s_{n'} - s_{n''}|\, dm = 0$, allora $\exists$ sottosucc. $\{s_{n_k}\}$ e funzione g tali che

1) $s_{n_k} \to g$ m-q.o.;

2) $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists$ insieme $A_\varepsilon \subseteq A$ con $m^*(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e $s_{n_k} \to g$ uniform. in $A \setminus A_\varepsilon$

<u>Dim. Lemma 3</u>. Fisso n_1 tale che

$$\int_A |s_{n'} - s_{n''}|\, dm < \frac{1}{4} \qquad \forall\, n', n'' \geq n_1 .$$

Poi fisso $n_2 > n_1$ tale che

$$\int_A |s_{n'} - s_{n''}|\, dm < \frac{1}{4^2} \qquad \forall\, n', n'' \geq n_2$$

... e così via: $n_k > n_{k-1}$ t.che $\int_A |s_{n'} - s_{n''}| < \frac{1}{4^k}$ $\forall\, n', n'' \geq n_k$

Abbiamo, in part., $\int_A |s_{n_k} - s_{n_{k+1}}|\, dm < \frac{1}{4^k}$ $\forall\, k$.

Considero gli insiemi

$$P_k = \left\{ x \in A : |s_{n_k}(x) - s_{n_{k+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^k} \right\}, \quad Q_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} P_i .$$

Se $x \notin Q_k$, $|s_{n_i}(x) - s_{n_{i+1}}(x)| < \frac{1}{2^i}$ $\forall\, i \geq k$ e

dunque per c. Weierstrass

$$\sum_{i=k}^{\infty} \left(s_{n_i}(x) - s_{n_{i+1}}(x) \right) \text{ conv. unif. in } A \setminus Q_k$$

$\Rightarrow$ $\{s_{n_i}\}$ succ. converge uniform. a una funzione $g_k : A \setminus Q_k \longrightarrow \mathbb{R}$.

Noto che siccome $Q_{k+1} \subseteq Q_k$ succede che

$A \setminus Q_k \subseteq A \setminus Q_{k+1}$ e $g_{k+1} = g_k$ su $A \setminus Q_k$.

Posto $Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$, esiste $g : A \setminus Q \to \mathbb{R}$

con $g = g_k$ su $A \setminus Q_k$.

Lemma 2 $\Rightarrow$ $m(P_k) < 2^{-k}$

Lemma 1 $\Rightarrow$ $m^*(Q) = 0$ perché $\sum_{k=1}^{\infty} m^*(P_k)$ conv.

$\Rightarrow$ $s_{n_k} \to g$ in $A \setminus Q$ punt., dunque m-q.o. in A

Pertanto 1) è provata. Per mostrare 2) basta prendere $A_\varepsilon = Q_k$ con $\sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} \leq \varepsilon$.

<u>Proposizione</u>. Se f è una funzione integrabile in A, il $\lim_{n\to\infty} \int_A s_n(x)dm$ esiste finito ed è indipendente dalla successione $\{s_n\}$ considerata (naturalmente fra le $\{s_n\}$ a scala tali che $s_n \to f$ m-q.o., $\lim_{n',n''\to\infty} \int_A |s_{n'} - s_{n''}| dm = 0$).

<u>Dim.</u>

- che il $\lim_{n\to\infty} \int_A s_n(x)\,dm$ esista finito è conseguenza della condizione di Cauchy.
- Siano ora $\{s_{1,n}\}$ e $\{s_{2,n}\}$ due succ. di funzioni a scala nelle condizioni della prop.: posto $s_n = s_{1,n} - s_{2,n}$, ho che $\{s_n\}$ è succ. funzioni a scala, con $s_n \to 0$ m-q.o. e $\{s_n\}$ verifica ancora cond. di Cauchy. Basta allora provare che $\int_A s_n\,dm \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$.
- Possiamo senz'altro supporre che gli insiemi
$$\{x \in A : s_n(x) \neq 0\}$$
non abbiano tutti misura nulla da un certo indice in poi (altrimenti $\int_A s_n(x)dm = 0$ ... e abbiamo già concluso).

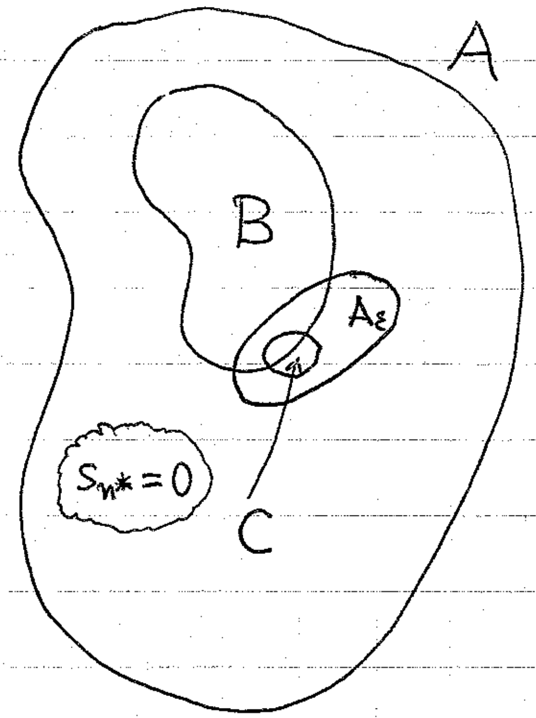
Fisso $\varepsilon>0$.

Esiste n^* : $\forall\ n', n'' \geq n^*$

$$\int_A |s_{n'} - s_{n''}|\, dm \leq \varepsilon$$

e posso supporre che

$B = \{x \in A : s_{n^*}(x) \neq 0\}$
abbia misura positiva
(alla peggio aumento n^*).



Sia $M>0$: $\quad |s_{n^*}(x)| \leq M \quad$ per q.o. $x \in A$.

Lemma 3 $\Longrightarrow$ $\exists\ s_{n_k} \to g$ m-q.o. (g dovrà essere $=0$)

$\exists\ A_\varepsilon$ con $m^*(A_\varepsilon) \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$ e

$\exists\ \bar{k} : \forall\ k \geq \bar{k} \quad |s_{n_k}(x) - 0| \leq \dfrac{\varepsilon}{m(B)}$

$\forall x \in A \setminus A_\varepsilon$

Fisso $k \geq \bar{k}$ tale che $n_k \geq n^*$

$$\int_A |s_n - s_{n_k}|\, dm \leq \varepsilon \quad \forall\ n \geq n^*.$$

Se $C = \left\{x \in A : |s_{n_k}(x)| > \dfrac{\varepsilon}{m(B)}\right\}$, ho $C \subseteq A_\varepsilon$ e $m(C) \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Ora, se $n \geq n^*$

$$\left|\int_A s_n\, dm\right| \leq \int_A |s_n - s_{n_k}| + \int_A |s_{n_k}| \leq \varepsilon + \int_{A\setminus B} |s_{n_k}| + \int_B |s_{n_k}|$$

$$\leq \varepsilon + \int_{A\setminus B} |s_{n_k} - s_{n^*}| + \int_{B\setminus C} |s_{n_k}| + \int_C |s_{n_k}|$$

$$\leq 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{m(B)}\, m(B\setminus C) + \int_C |s_{n_k} - s_{n^*}| + \int_C |s_{n^*}|$$

$$\leq 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + m(C) M \leq 5\varepsilon.$$