Corso di dottorato Colli - Schimperna

Variational methods for evolution equations

marzo-maggio 2017

Appunti relativi alla prima parte tenuta da Pierluigi Colli

Chiarire definizione di $L^1(0,T;V)$ per bene

E come si definisce $L^p(0,T;V)$?

Considediamo:

s_k successione di funzioni semplici misurabili

integrale di una funzione s semplice misurabile

$$\int s\,dt = \underbrace{\sum_{x\in V}{}'}_{\text{somma finita}} \underbrace{\mu\left(\{s^{-1}(x)\}\right)}_{\text{serve che } \mu(\{s^{-1}(x)\})<+\infty \text{ altrimenti } s \text{ non è integrabile}} x$$

Def. $f:(0,T)\to V$ è integrabile se esiste una successione di funzioni semplici integrabili s_n tali che

$\forall n \quad t \longmapsto \|s_n(t)-f(t)\|_V$ è integrabile

e $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{(0,T)}\|(s_n-f)(t)\|_V\,dt=0$

Allora $\int_{(0,T)} s_n(t)\,dt$ converge in V e il suo limite è indipend. dalla successione $\{s_n\}$ scelta.

Teorema importante (Bochner)

f è integrabile se e solo se f è misurabile forte e $t \longmapsto \|f(t)\|_V$ è integrabile. Inoltre

$$\left\| \int_{(0,T)} f\,dt \right\|_V \leq \int_{(0,T)} \|f(t)\|\,dt$$

Oss. Le funzioni semplici possono essere sostituite dalle funzioni continue a supporto compatto.

Importante: vale ancora il teorema di Lebesgue della convergenza dominata e basta una dominante per le norme, $\|f_n(t)\| \leq g(t)$, q.o. $t \in (0,T)$.

$L^p(0,T;V)$: serve • f misurabile
• $t \longmapsto \|f(t)\|$ in $L^p(0,T)$

Norma è quella naturale.

$L^p(V)$ è Banach se V lo è.

$L^2(V)$ è Hilbert se V lo è.

$\mathcal{D}(I;V)$ è denso in $L^p(I;V)$ per $1 \leq p < \infty$
(troncatura e regolarizzazione per convoluzione)

Possiamo definire $L^{p'}(I;V^*)$ e questi elementi mi danno funzionali lineari e continui su $L^p(I;V)$

<u>Teorema</u> Se $1 \leq p < \infty$ e V è riflessivo oppure V^* è separabile, allora $(L^p(I;V))^*$ è isomorfo a $L^{p'}(I;V^*)$. Se $1 < p < \infty$ e V è riflessivo, allora $L^p(I;V)$ è riflessivo; se V è separabile allora $L^p(I;V)$ con $1 \leq p < \infty$ è separabile.

Si considerano distribuzioni di $(0,T)$ a valori in uno spazio V come operatori lineari

$$\mathcal{D}(0,T) \xrightarrow{T} V$$

$(\mathcal{D}'(]0,T[;V))$ per cui vale la proprietà di continuità

$$T(\varphi_n) \to T(\varphi) \text{ in } V \text{ se } \varphi_n \to \varphi \text{ in } \mathcal{D}(0,T)$$

Es. 1. $u \in L^1_{loc}(0,T;V)$, allora

$$T(\varphi) = \int_0^T u(t)\,\varphi(t)\,dt \text{ è una distribuz.}$$

2. fissato x in V, l'applicazione

$$\varphi \longmapsto \varphi\left(\tfrac{T}{2}\right)x$$

è una distribuzione

Derivata nel senso delle distribuzioni

Altre cose che ho detto loro:

N.B. $L^p(0,T;V)$ è separabile se V lo è e $1 \le p < \infty$;

$L^2(0,T;V)$ è Hilbert se V lo è;

$C^0_c([0,T];X)$ è denso in $L^p(0,T;X)$, per $1 \le p < \infty$

<u>Proposizione</u> Se V è un Banach e $u \in L^1_{loc}(0,T;V)$ verifica

$$\int_0^T \varphi(t)\, u(t)\, dt = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

$\Rightarrow u = 0$ in $L^1_{loc}(0,T;V)$.

<u>Dim</u> (per V' separabile) oppure per $V = X'$ con X separabile:

$$\int_0^T \varphi(t) < u(t), v_i > dt = 0 \qquad \forall\ v_i$$

$\Rightarrow < u(t), v_i > = 0 \quad \forall\ t \in [0,T] \setminus Z(i)$, con $Z(i)$ di misura nulla

$\Rightarrow < u(t), v > = 0 \quad \forall\ t \in [0,T] \setminus Z \quad , Z = \bigcup_i Z(i)$

$w = u'$ $\left(\text{oppure } \frac{du}{dt}\right)$ se vale la seguente

$$-\int_0^T \varphi'(t)\, u(t)\, dt = \int_0^T \varphi(t)\, w(t)\, dt$$

e in generale $w = u^{(n)}$ se

$$\int_0^T \varphi(t)\, w(t)\, dt = (-1)^n \int_0^T \varphi^{(n)}(t)\, u(t)\, dt.$$

Questa è la definizione di <u>derivata generalizzata</u>

Nota bene : $u \in L^1(0,T;Y)$, $w \in L^1(0,T;Z)$
possono essere in spazi differenti.
L'uguaglianza di prima va allora intesa in $Y \cap Z$

Se $Y = Z$ e $u \in C^1([0,T];Y)$ allora la derivata debole o generalizzata coincide con quella usuale: basta integrare per parti.

Legame con teoria distribuzioni

$$\mathcal{D}(0,T) \xrightarrow{T} Y$$

Se $u \in L^1(0,T;Y)$ allora

$$T_u(\varphi) = \int_0^T \varphi(t) u(t)\, dt$$

definisce una distribuzione. La sua derivata è definita da

$$(\partial_t T_u)(\varphi) = - T_u(\varphi_t)$$

ma se vale

$$-\int_0^T \varphi' u\, dt = \int_0^T \varphi w\, dt$$

allora

$$(\partial_t T_u)(\varphi) = \int_0^T \varphi w\, dt$$

e la distribuzione può essere rappresentata da $w \in L^1(0,T;Z)$.

Unicità della derivata generalizzata in $L^1(0,T;Z)$ viene dalla proposizione di pagina precedente

---

Proposizione. Se $Y \hookrightarrow Z$ con immersione continua e $u_n \to u$ in $L^p(0,T;Y)$, $v_n = u_n' \to v$ in $L^q(0,T;Z)$ $\Rightarrow$ $v = u'$.

Dim. Tutte le convergenze implicano quella debole in $L^1(0,T;Z)$

Definisco $W^{1,p}(0,T;X)$. Spazio di Banach.

Provo un teorema fondamentale del calcolo.

Se $u \in L^p(0,T;Y)$ e $u' \in L^q(0,T;Z)$, $Y \subset Z$ con immersione continua, allora.

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)ds.$$

Dim.

Comincio a provare che la funzione

$$v(t) = \int_0^t u'(s)ds$$

ha derivata generalizzata uguale ad u'.

Devo usare densità di $C^0([0,T];Z)$. Sia q_n in $C^0([0,T];Z)$ con $q_n \to u'$ in $L^1(0,T;Z)$: provo che $p_n(t) = \int_0^t q_n(s)ds$ converge a v in $C^0([0,T];Z)$ dunque in $L^1(0,T;Z)$ da cui passo al limite

$$\text{in } \int_0^T p_n \varphi' = -\int_0^T \varphi q_n$$

$\Rightarrow v' = u'$.

Se ora $u' = 0$, provo che u è costante (l'altra freccia è banale).

$$\int_0^T \varphi' u \, dt = 0 \quad \forall \quad \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

Fisso ρ in $\mathcal{D}(0,T)$ con $\int_0^T \rho = 1$. Allora $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ si può scrivere come

$$\psi = \left(\int_0^T \psi \, ds\right)\rho + \varphi'$$

con φ definita da $\varphi(t) = \int_0^t \left(\psi - \left(\int_0^T \psi \, ds\right)\rho\right) ds$

Posto $c = \int_0^T \rho u \, dt$, viene

$$\int_0^T \psi u \, dt = \int_0^T \psi \, dt \int_0^T \rho u \, dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^T \psi (u - c) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T)$$

$$\Rightarrow \quad u(t) - c = 0 \quad \text{q.o.}$$

$W^{1,1}(0,T;Z) \hookrightarrow C^0([0,T];Z)$ e vale la stima

|| la continuità scende dall'assoluta continuità dell'integrale

$$\|u\|_{C^0} \leq C \left(\|u\|_{L^1(0,T;Z)} + \|u'\|_{L^1(0,T;Z)} \right)$$

$W^{1,\infty}(0,T;Z)$ sono le lipschitziane.

$W^{1,p}(0,T;Z)$ sono hölderiane di un certo esponente $\frac{1}{p'}$

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \left| \int_s^t \|u'(\tau)\| \, d\tau \right| \leq |t-s|^{1/p'} \|u'\|_{L^p(0,T;Z)}$$

$V \subseteq H \subseteq V'$ tripla di spazi normati reali
V Banach separabile e riflessivo
H Hilbert separabile
$V \hookrightarrow H$ con immersione continua
V denso in H

$\exists\, c_V$ tale che $\|u\|_H \leq c_V \|u\|_V \quad \forall u \in V$

Ad ogni $h \in H$ corrisponde $i(h) \in V'$ così definito

$$|\langle i(h), v \rangle| = |(h, v)| \leq \|h\|_H \|v\|_H$$
$$\leq c_V \|h\|_H \cdot \|v\|_V$$

$i : H \to V'$ è lineare e continuo. Inoltre i è anche iniettiva: se $i(h) = 0$ allora $(h, v) = 0 \ \forall v \in V$ ma siccome V è denso in H, ne viene che $h = 0$.

Se ora identifichiamo h con $i(h)$, osserviamo che H è denso in V': infatti se $w \in (V'')$ è tale che

$${}_{V''}\langle w, v \rangle_{V'} = 0 \quad \forall v \in H$$

dalla riflessività di V segue ${}_{V'}\langle v, J^{-1}(w) \rangle_V = (v, J^{-1}(w)) = 0$
$\forall v \in H$

dunque $J^{-1}(w) = 0$ in $H (\supseteq V)$ per cui $w = 0$.

$\boxed{J \text{ immersione canonica}}$

$V \hookrightarrow H$, V denso in $H \implies H' \hookrightarrow V'$

Identifichiamo H con H', dunque $H \hookrightarrow V'$

N. B. Se $u \in L^1(0,T;Z)$, $u' \in L^q(0,T;Z)$ con $q>1$ allora $u \in W^{1,q}(0,T;Z)$

$$\cancel{u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)\,d\tau}$$

$$\cancel{T\|u(t)\| \leq \int_0^T \|u(s)\|\,ds + T\int_0^T \|u'(\tau)\|\,d\tau}$$

Infatti:

$$W^{1,1}(0,T;Z) \hookrightarrow C^0([0,T];Z) \hookrightarrow L^q(0,T;Z)$$

Passo ora a provare che se $V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$ è una terna di evoluzione e $1<p,q<\infty$ con

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

allora $W=\{u \in L^p(0,T;V) : u' \in L^q(0,T;V')\}$ è uno spazio di Banach con norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'\|_{L^q(0,T;V')}$$

ed è immerso con continuità in $C^0([0,T];H)$

(seguono pagine che sono in parte fotocopie di un libro)

23.10a. Show that W is a B-space. W è uno spazio di Banach

$W = \{u \in L^p(0,T;V) : u' \in L^q(0,T;V')\}$ con $1 < p,q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ terna di evoluzione

Solution: If (u_n) is a Cauchy sequence in W, then

$$u_n \to u \quad \text{in } L_p(0,T;V) \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

$$u_n' \to v \quad \text{in } L_q(0,T;V^*) \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

with suitable points u and v. Observe that $L_p(0,T;V)$ and $L_q(0,T;V^*)$ are B-spaces. The continuity of the embedding $V \subseteq V^*$ implies $v = u'$, according to Proposition 23.19. Hence

$$u_n \to u \quad \text{in } W \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$ *

23.10b. Show that $C^1([0,T],V)$ is dense in W.

densità:
- prolungamento
- regolarizzaz. per mollif.
- troncatura all'intervallo $[0,T]$

Solution: The proof proceeds analogously to the corresponding proof for classical Sobolev spaces in Section 21.4. Observe that, because of the p-mean continuity in Problem 23.9, the smoothing operator for $u \in W$ has the same properties as the classical smoothing operator from Section 18.14.

From Problem 23.3 it follows additionally that the set of all the polynomials $p: [0,T] \to V$ with coefficients in V is dense in the space W.

23.10c. Show that the embedding $W \subseteq C([0,T],V^*)$ is continuous.

Solution: Denote the norm on V^* and $L_p(0,T;V^*)$ by $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|_p$, respectively. Let $u \in W$. The idea of the proof is to consider the function

$$v(t) = \int_0^t u'(s)\,ds.$$

Then, $v \in C([0,T],V^*)$. To see this, observe that

$$\|v(t) - v(s)\| \le \int_s^t \|u'(z)\|\,dz$$

and use the absolute continuity of the integral, $A_2(20)$.

By Problems 23.5a and 23.8, we obtain $v' = u'$, and hence

$$v(t) = u(t) + c \qquad \text{for almost all } t \in \,]0,T[, \tag{66}$$

where $c \in V^*$. The Hölder inequality yields

$$\max_{0 \le t \le T} \|v(t)\| \le T^{1/p}\|u'\|_q, \qquad \|c\| = T^{-1/p}\|c\|_p. \tag{67}$$

From (66) and (67) it follows that

$$\max_{0 \le t \le T} \|u(t)\| \le d(\|u'\|_q + \|v - u\|_p) \le d(\|u'\|_q + \|v\|_p + \|u\|_p) \le d_1\|u\|_W.$$

23.10d. Show that the embedding $W \subseteq C([0,T],H)$ is continuous.

* Se $p = q = 2$ e anche V, V' sono Hilbert, allora W è un Hilbert rispetto al prodotto scalare $(u,v)_W = \int_0^T \{(u,v)_V + (u',v')_{V'}\}(s)\,ds$

7

$$|(u(s),u(s))| \leq \|u(s)\|_{V'} \|u(s)\|_{V} \leq \|u\|_{C^0([0,T];V')} \|u(s)\|_{V}$$

8

Solution:

(I) Integration by parts. Let $u, v \in C^1([0, T], H)$. Integrating

$$(u(t)|v(t))' = (u'(t)|v(t)) + (u(t)|v'(t)),$$

we get the integration by parts formula

$$(u(t)|v(t)) - (u(s)|v(s)) = \int_s^t (u'(z)|v(z)) + (u(z)|v'(z))\,dz, \qquad (68)$$

for all $0 \leq s \leq t \leq T$. By (17),

$$(u|v) = \langle u, v\rangle \qquad \text{for all} \quad u, v \in V.$$

For $u, v \in C^1([0, T], V)$, this implies

$$(u(t)|v(t)) - (u(s)|v(s)) = \int_s^t \langle u'(z), v(z)\rangle + \langle v'(z), u(z)\rangle\,dz, \quad (69)$$

for all $0 \leq s < t \leq T$.

(II) In order to cancel the term $(u(s)|v(s))$ in (69), we choose a test function $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ with $\varphi(s) = 0$ and $\varphi(t) = 1$. Moreover, let $|\varphi| + |\varphi'| \leq 1$ on $\mathbb{R}$. Set $v = \varphi u$. Equation (69) implies that

$$(u(t)|u(t)) \leq \text{const}\,\|u\|_W^2 \qquad \text{for all} \quad u \in C^1([0, T], V). \qquad (70)$$

To see this, observe that $v' = \varphi' u + \varphi u'$ and use the Hölder inequality. Equation (70) yields

$$\|u\|_{C([0,T],H)} \leq \text{const}\,\|u\|_W \qquad \text{for all} \quad u \in C^1([0, T], V). \quad (71)$$

The set $C^1([0, T], V)$ is dense in W. By (71) and the extension principle from Section 18.12, the embedding operator

$$j\colon C^1([0, T], V) \subseteq W \to C([0, T], H)$$

has a unique continuous extension $j\colon W \to C([0, T], H)$. In this sense, the embedding

$$W \subseteq C([0, T], H)$$

is continuous.

non è possibile chiedere (vedi sopra idea per come fare) In ogni caso, nella pagina successiva è sviluppato per bene il conto.

23.10e. Show that the integration by parts formula (69) holds for all $u, v \in W$.
Solution: Use the density of $C^1([0, T], V)$ in W and a limiting process in (69).

23.11. *Weak* convergence*. Let X be a B-space. Recall that a sequence (x_n^*) from X^* is called weakly* convergent to the point x^* in X^* iff

Sia $u \in C^1([0,T];V)$. Vale allora la stima

$$\|u(t)\|_H^2 \le \|u\|_{C^0([0,T];V')}\|u(s)\|_V + 2\|u'\|_{L^q(0,T;V')}\|u\|_{L^p(0,T;V)} \qquad \forall\, t,s\in[0,T]$$

Integro ora rispetto ad s in $[0,T]$

$$\|u(t)\|_H^2 \le \frac{1}{T}\, C\left(\frac{1}{T}\|u\|_{L^1(0,T;V')} + \|u'\|_{L^1(0,T;V')}\right)\times \|u\|_{L^1(0,T;V)} + 2\|u\|_W^2$$

Ora osservo che:

$$\|v\|_{L^1(0,T;Z)} \le T^{1/r'}\|v\|_{L^r(0,T;Z)} \qquad \text{per } r>1,\ \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$$

si ottiene pertanto (C costante di $V\hookrightarrow V'$)

$$\|u(t)\|_H^2 \le \frac{C}{T^2}\|u\|^2_{L^1(0,T;V)} + \frac{1}{T}\|u'\|_{L^1(0,T;V')}\|u\|_{L^1(0,T;V)} + 2\|u\|_W^2$$

$$\le \frac{C\,T^{2/q}}{T^2}\|u\|^2_{L^p(0,T;V)} + \frac{T^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}}{T}\|u\|_{L^p(0,T;V)}\|u'\|_{L^q(0,T;V')} + 2\|u\|_W^2$$

$$\le \left(\frac{C}{T^{2/p}} + 3\right)\|u\|_W^2 \qquad \text{OK. } \forall t.$$

Ora

$$\|u\|_{C^0([0,T];H)} \leq C\|u\|_W \quad \forall u \in C^1([0,T];V)$$

Siccome $C^1(V)$ è denso in W, se $u_n \to u$ in W, $u_n \in C^1([0,T];V)$ $\forall n$, scende che $\{u_n\}$ è di Cauchy in $C^0([0,T];H)$, dunque converge a una v in $C^0([0,T];H)$ e per forza $v=u$ perché i due limiti devono coincidere in $L^1(0,T;V')$.

Ora si passa al limite facilmente anche nell'identità in (69).

Lemma di Gronwall

$\phi_0 \geq 0$, $m \in L^1(0,T)$, $m \geq 0$, ϕ continua

$$\phi(t) \leq \phi_0 + \int_0^t m(s)\phi(s)\,ds$$

$$\Longrightarrow \quad \phi(t) \leq \phi_0 e^{+\int_0^t m(s)ds} \quad \forall\, t.$$

$\cancel{e^{-\int_0^t m(s)ds}\phi(t)}$

Dimostrazione

$$\Psi(t) = \phi_0 + \int_0^t m(s)\phi(s)\,ds$$

ipotesi

$$\frac{d\Psi}{dt} = m(t)\phi(t) \leq m(t)\Psi(t)$$

$$e^{-\int_0^t m(s)ds}\,\psi'(t) - m(t)\,e^{-\int_0^t m(s)ds}\,\psi(t) \leq 0$$

dunque

$$t \longmapsto e^{-\int_0^t m(s)ds}\,\psi(t) \quad \text{è decrescente}$$

$$\Psi(t) \leq \Psi(0) = \phi_0 e^{\int_0^t m(s)ds}$$

$$\phi(t) \leq \phi_0 e^{\int_0^t m(s)ds}.$$

Oppure altra dimostrazione: provare che

$$e^{-\int_0^t m(s)ds}\left(\phi_0 + \int_0^t m(s)\phi(s)\,ds\right) \quad \text{è decrescente}$$

$$-m(t)\,e^{-\int_0^t m(s)ds}\,\psi(t) + e^{-\int_0^t m(s)ds}\big(m(t)\phi(t)\big) \leq 0.$$

(1) $\partial_t u - \Delta u = f$ in $\Omega \times (0,T)$

(2) $\nabla u \cdot \nu + \alpha u = g$ su $\Gamma \times (0,T)$

(3) $u(\cdot, 0) = u_0$ in Ω

11

Testiamo la (1) per v, integrando formalmente per parti e otteniamo

$$\int_\Omega \partial_t u \cdot v_{dx} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_{dx} + \int_\Gamma \alpha u \cdot v_{ds} = \int_\Omega f(x,t)\, v_{dx} + \int_\Gamma g(x,t) v_{s}$$

ds elemento superficiale

Possiamo introdurre $V = H^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \alpha(x) u \cdot v \, ds \quad , \quad u, v \in V,$$

e l'elemento $h(t) \in V'$ tale che

$$\langle h(t), v \rangle = \int_\Omega f(x,t) v \, dx + \int_\Gamma g(\cdot,t) v \, ds$$

Naturalmente negli integrali di bordo compare la traccia delle funzioni di $H^1(\Omega)$, che sta in $H^{1/2}(\Gamma) \subseteq L^2(\Gamma)$. Proprietà della forma a ed esempio di forma non simmetrica inserendo termine di convezione

Il problema si può riscrivere

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle + \langle Au(t), v \rangle = \langle h(t), v \rangle$$

con l'operatore $A : V \to V'$ definito dalla forma bilineare e $h(t) \in V'$ definito da f e da g.

Se $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$ e $g \in L^2(\Gamma \times (0,T))$ ne viene

$$h \in L^2(0,T; V')$$

$$\frac{d}{dt} < u(t), v > \; = \; < u'(t), v >$$

In effetti

$$\int_0^T \frac{d}{dt} < u(t), v > \varphi(t)\, dt = - \int_0^T < u(t), v > \varphi'(t)\, dt$$

$$= - \int_0^T < u(t) \varphi'(t), v > dt = < - \int_0^T u(t) \varphi'(t) dt, v >$$

$$< \int_0^T u'(t) \varphi(t)\, dt, v > \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Da cui riscriviamo

$$< u'(t), v > + < Au(t), v > = < h(t), v > \qquad \forall\, v \in V.$$

Cercare $u \in W =: H^1(0,T; V, V')$? per cui $u \in C^0([0,T]; H)$ e ha senso la condizione iniziale. Ancora l'equazione si può riscrivere

$$\int_0^T - < u(t), v > \varphi'(t)\, dt = \int_0^T < f(t) - Au(t), v > \varphi(t)\, dt \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

Ipotesi sulla forma a debolmente coerciva:

$$a(v,v) \geq L \|v\|_V^2 - \lambda \|v\|_H^2 \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

Ipotesi su $h \in L^2(0,T; V')$, $u_0 \in H$.

Tutto Ok con $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$, $\alpha \geq 0$, $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$, $g \in L^2(\Gamma \times (0,T))$.

Unicità e dipendenza continua

Soluzione in $H^1(0,T;V,V')$

coppie di dati $\{u_{0i}, h_i\}_{i=1,2}$ e soluzioni u_i, $i=1,2$.

Poniamo $u_0 = u_{01} - u_{02}$, $h = h_1 - h_2$.

Testiamo differenza delle equazioni con $v = u(t)$

$$\langle u'(t), u(t)\rangle + L\|u(t)\|_V \leq \|h(t)\|_{V'}\|u(t)\|_V + \lambda\|u(t)\|_H^2$$

e da qui, integrando in tempo,

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 + L\int_0^t \|u(s)\|_V^2\,ds \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \frac{1}{2L}\int_0^t \|h(s)\|_{V'}^2\,ds + \frac{L}{2}\int_0^t \|u(s)\|_V^2\,ds + \lambda\int_0^t \|u(s)\|_H^2\,ds$$

e da qui, risistemando e applicando il lemma di Gronwall,

$$\|u(t)\|_H^2 + L\int_0^t \|u(s)\|_V^2\,ds \leq \left(\|u_0\|_H^2 + \frac{1}{L}\int_0^T \|h(s)\|_{V'}^2\,ds\right)e^{2\lambda t} \quad \forall\, t\in[0,T]$$

che fornisce dunque la stima

$$\|u\|_{C^0([0,T];H)}^2 + \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C\left(\|u_0\|_H^2 + \|h\|_{L^2(0,T;V')}^2\right)$$

Da qui unicità della soluzione e una stima di dipend. continua, con C che dipende solo da L, λ, T.

Schema Faedo-Galerkin $\{v_i\}$ base in V (e dunque anche in H) 14

V_n generato da $\{v_1, \dots, v_n\}$ linearmente indipendenti $\qquad V_\infty = \bigcup_n V_n \underset{ds}{\hookrightarrow} V$

$$\langle u_n'(t), v_i\rangle + a(u_n(t), v_i) = \langle h(t), v_i\rangle \quad , \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\langle u_n(0), v_i\rangle = \langle u_0, v_i\rangle \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

Cerco u_n della forma

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t) v_j \quad . \qquad \text{Definisco}$$

$$B_{ij} = (v_j, v_i) \quad , \quad D_{ij} = a(v_j, v_i)$$

$$y_{0i} = \langle u_0, v_i\rangle \qquad f_i(t) = \langle h(t), v_i\rangle \qquad \begin{cases} B\vec{y}\,'(t) + D\vec{y}(t) = \vec{f}(t) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Siccome $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, ne segue che B è invertibile.

Gli $f_i(t)$ stanno in $L^2(0,T)$

$$|f_i(t)| \leq \|h(t)\|_{V'} \|v_i\|_V \leq \|h(t)\|_{V'} \max_i \|v_i\|_V$$

e y_{0i} sono in $\mathbb{R}$.

Il sistema di ODE ha una ~~del~~ ed una sola soluzione in $H^1(0,T)$ e dunque $u_n \in H^1(0,T; V_n)$ (è un sistema lineare!)

Ora stima a priori che è la stessa della dipendenza continua

$$\|u_n\|^2_{C^0([0,T]; H)} + \|u_n\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq C\left(\|u_n(0)\|^2_H + \|h\|^2_{L^2(0,T;V')}\right)$$

Occorre provare che $u_n(0)$ è limitato in H: ma $u_n(0)$ è la proiezione ortogonale in H di u_0 su V_n (che è sottospazio di H) per cui $\|u_n(0)\|_H \leq \|u_0\|_H$ è limitato.

In realtà possiamo anche provare che

$$u_n(0) \to u_0 \text{ in } H.$$

Infatti

$$\|u_n(0) - u_0\|_H \leq \|u_0 - v\|_H \ \forall v \in V_n.$$

Siccome V_∞ è denso in V, è denso anche in H: sia $\{v_k\} \subset V_\infty$ con $v_k \to u_0$ per $k \to \infty$. Ora per ogni k esiste un indice $n_k > n_{k-1}$ tale che $v_k \in V_{n_k}$.
Dunque la successione numerica

$$d_{n_k} = \|u_{n_k}(0) - u_0\|$$

tende a 0 per forza, ma allora tende a 0 anche tutta la successione $\{d_n\}$ che è decrescente $(V_n \subseteq V_{n+1})$

Si passa ora al limite debole di u_n a u in $L^2(0,T;V)$.
Oss. Siccome il limite è unico, è tutta la succ. che conv. debole.
Oss. C'è conv. debole $*$ in $L^\infty(0,T;H)$ (siccome $L^1(0,T;H)$ è separabile).

Oss. Non si poteva dedurre la stima $\|u'_n\|_{L^2(0,T;V)} \leq C$ a livello del problema approssimato.

Oss. Dati iniziali: non ci voleva esattamente la proiezione in H su V_n, bastava $u_n(0) \in V_n \ \forall n$ e $u_n(0) \to u_0$ in H.

Oss. Si poteva regolarizzare $h(t)$ con $h_n(t)$ continua in tempo e a valori anche in V, se serviva.

Oss. posso prendere A dipendente da t a patto di avere la misurabilità di $a(t,u,v)$. Fare esempio.

Teorema di regolarità per A indip. da t e simmetrico, $f \in L^2(0,T;H)$ e $u_0 \in V$. Definire $D(A)$ sottospazio chiuso di V con norma $\left(\|u\|_V^2 + \|Au\|_H^2\right)^{1/2}$.
Esplicitare $D(A)$ nel caso $-\Delta$ con condizioni al bordo di tipo Neumann omogenee.

La regolarità della soluzione forte è in tal caso

$$u \in H^1(0,T;\, D(A), H)$$

e tale spazio è immerso con continuità in $C^0([0,T];V)$.

La dimostrazione viene fatta sullo schema di Faedo Galerkin testando per $u_n'(t)$ e prestando attenzione alla regolarità del dato iniziale approssimato u_{0n}, che deve essere tale che

$\{u_{0n}\}$ sia limitata in V e converga a u_0 forte o debole in H.

Passaggio al limite per $n \to \infty$ è più semplice avendo a disposizione questa stima:

$$\| u_n \|_{H^1(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V)} \leq C.$$

La regolarità $u \in L^2(0,T;D(A))$ si ricava poi alla fine per confronto nell'equazione limite. Di contro, la regolarità $u \in H^1(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V)$ si ottiene anche se

$$f = f_1 + f_2\,, \quad \text{con} \quad f_1 \in L^1(0,T;H)\,,\ f_2 \in W^{1,1}(0,T;V')$$

con un uso mirato del lemma di Gronwall.

Due istanze

- insegnare loro discretizzazione in tempo: $\tau = \frac{T}{N}$

$$\frac{u^i - u^{i-1}}{\tau} + Au^i = f^i$$

$$u^0 = u_0$$

e $f_i = \frac{1}{\tau} \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} f(s)\,ds \quad , \; i = 1, \dots, N$;

- Studiare anche equazioni iperboliche.

Allora

$$\begin{cases} u'' + Au = f & \text{in } V', \text{ q.o. in } (0,T) \\ u(0) = u_0 \; , & u'(0) = v_0 \end{cases}$$

lo studio con discretizzazione in tempo.

N.B.: lavoro con ipotesi forti sui dati, elimenò dopo.

<u>Teorema di esistenza di una soluzione forte</u>

Siano $V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$ con immersioni continue e dense.
Assumo A simmetrica V $u_0 \in V$, $v_0 \in V$, $f \in W^{2,1}(0,T;V') + H^1(0,T;H)$ con $f(0) - Au_0 \in H$. Allora esiste una soluzione

$$u \in W^{2,\infty}(0,T;H) \cap W^{1,\infty}(0,T;V).$$

<u>Dimostrazione</u>

approssimo con discretizzazione in tempo $n \in \mathbb{N}$, $\tau = \frac{T}{n}$, siccome f_1, f_2 sono continue posso porre $f_1^i = f_1(\tau i)$, $f_2^i = f_2(\tau i)$, $f^i = f_1^i + f_2^i$

Problema approssimato (P_τ). Trovare due vettori $(u^0, u^1, \dots, u^n) \in V^{n+1}$, $(v^0, v^1, \dots, v^n) \in V^{n+1}$ tali che

$$u^0 = u_0 \quad , \quad v^0 = v_0$$

e inoltre

$$v^i = \frac{u^i - u^{i-1}}{\tau} ,$$

$$\frac{v^i - v^{i-1}}{\tau} + Au^i = f^i .$$

Esiste una ed una sola soluzione.

u^0, v^0 li trovo subito, posso partire. Assumendo noti v^{i-1}, u^{i-1} risulta che devo risolvere

$$\frac{1}{\tau} u^i + \tau A u^i = \left(\tau \; f^i + v^{i-1}\right) + \frac{1}{\tau} u^{i-1}$$

Se A è coercivo in senso debole tutto OK, basta prendere $\frac{1}{\tau} > \tau\lambda$ cioè $\tau < \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ perché

$$\frac{1}{\tau} I + \tau A \text{ sia un isomorfismo.}$$

Introduciamo il vettore ausiliario $(z_0, z_1, \dots z_n) \in V^{n+1}$ con

$$z^0 = z^1 , \qquad z^i = \frac{v^i - v^{i-1}}{\tau} \quad , i = 1, \dots, n .$$

Allora $u_\tau, v_\tau, z_\tau \in L^1(0,T;V)$ e $f_\tau \in L^1(0,T;V')$ siano le costanti a tratti:

$$u_\tau(t) = u^i, \dots, \; f_\tau(t) = f^i \quad \text{se} \quad (i-1)\tau < t \leq i\tau$$

$\hat{u}_\tau, \hat{v}_\tau, \hat{z}_\tau$ le lineari a tratti

$$\hat{u}_\tau(t) = u^i + \frac{u^i - u^{i-1}}{\tau}(t - i\tau), \dots \quad (i-1)\tau \le t \le i\tau$$

che dunque coincidono con le costanti a tratti nei punti $i\tau$.
Abbiamo dunque

$$z_\tau(t) + Au_\tau(t) = f_\tau(t)$$
$$v_\tau(t) = \hat{u}'_\tau(t), \quad z_\tau(t) = \hat{v}'_\tau(t) \qquad t \in (0,T)$$
$$\hat{u}_\tau(0) = u_0, \quad \hat{v}_\tau(0) = v_0$$

<u>Stime a priori</u> (qui $|\cdot|$ indica la norma in H)
Scriviamo l'equazione anche per l'indice $i-1$ e prendiamo la differenza

$$z^i - z^{i-1} + \tau A v^i = f^i - f^{i-1}$$

da cui

$$z^i - z^{i-1} + \lambda\tau v^i + \tau A v^i = f^i - f^{i-1} + \lambda\tau v^i$$

Moltiplico scalarmente per z^i

$$\frac{1}{2}|z^i|^2 - \frac{1}{2}|z^{i-1}|^2 + \frac{1}{2}|z^i - z^{i-1}|^2$$
$$+ \frac{1}{2} a_\lambda(v^i, v^i) - \frac{1}{2} a_\lambda(v^{i-1}, v^{i-1}) + \frac{\tau^2}{2} a_\lambda(z^i, z^i)$$
$$= \langle f^i - f^{i-1} + \lambda\tau v^i, z^i \rangle$$

con $a_\lambda(u,v) = \langle Au, v\rangle + \lambda(u,v)$; posto ora

$$S_m = \frac{1}{2}|z^m|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m |z^i - z^{i-1}|^2 + \frac{1}{2} a_\lambda(v^m, v^m) + \sum_{i=1}^m \frac{\tau^2}{2} a_\lambda(z^i, z^i)$$

e sommando le precedente uguaglianze da **2** a m si trova

$$S_m = S_1 + \sum_{i=2}^{m} \tau \left\langle \frac{f^i - f^{i-1}}{\tau} + \lambda v^i, z^i \right\rangle$$

Ora per $i=1$ testiamo con z^1

$$\frac{1}{2}|z^1|^2 + S_1 = \langle f^1 - Au^1, z^1 \rangle + \cancel{\frac{1}{2}|\underbrace{z^1 - z^0}_{=0}|^2}$$
$$+ \frac{1}{2} a_\lambda(v^1, v^1) + \frac{\tau^2}{2} a_\lambda(z^1, z^1)$$

si verifica che dovrebbe essere uguale a

$$(f(0) - Au_0, z^1) + \frac{1}{2} a_\lambda(v^0, v^0) + \tau \left\langle \frac{f^1 - f^0}{\tau} + \lambda v^1, z^1 \right\rangle$$

Ora siccome

$$(f(0) - Au_0, z^1) - \frac{1}{2}(z^1, z^1) \leq \frac{1}{2}|f(0) - Au_0|^2$$

si trova

$$S_m \leq C_1 + \sum_{i=1}^{m} \tau \left\langle \frac{f^i - f^{i-1}}{\tau} + \lambda v^i, z^i \right\rangle \text{ per } m \geq 1.$$

Ora

$$S_m \leq C_1 + \sum_{j=1}^{3} R_j(m),$$

con $R_1(m) = \langle g_1^m, v^m \rangle - \langle g_1^1, v^0 \rangle - \sum_{i=2}^{m} \tau \left\langle \frac{g_1^i - g_1^{i-1}}{\tau}, v^{i-1} \right\rangle$

$$R_2(m) = \sum_{i=1}^{m} \tau |g_2^i||z^i|, \quad R_3(m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda\tau |v^i||z^i|$$

dove $g_k^i = \dfrac{f_k^i - f_k^{i-1}}{\tau}$, $k = 1,2$. Ora

$$\| g_1^i \|_* \leq \frac{1}{\tau} \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \| f_1'(t) \|_* dt \leq \| f_1' \|_{C^0([0,T];V')}$$

$$\left\| \frac{g_1^i - g_1^{i-1}}{\tau} \right\|_* \leq \frac{1}{\tau^2} \left\| \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \left(f_1'(t) - f_1'(t-\tau) \right) dt \right\|_*$$

$$\leq \frac{1}{\tau^2} \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \int_{t-\tau}^{t} \| f_1''(s) \|_* ds\, dt \leq \frac{1}{\tau} \| f_1'' \|_{L^1((i-2)\tau, i\tau; V')}$$

Qui, $\| \cdot \|_*$ indica la norma in V'. Allora si ha

$$| R_1(m) | \leq \sigma \max_{1 \leq i \leq m} \| v^i \|_V^2 + C_2(\sigma).$$

Inoltre, osserviamo che

$$| R_2(m) | \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \tau | z^i |^2 + \frac{1}{2} \| f_2' \|^2_{L^2(0,T;H)}.$$

$$| R_3(m) | \leq C_3 \sum_{i=1}^{m} \tau \| v^i \|_V^2 + \lambda \sum_{i=1}^{m} \tau | z^i |^2.$$

Posto $N_m = \frac{1}{2} \left(|z^m|^2 + \sum_{i=1}^{m} |z^i - z^{i-1}|^2 \right) + \frac{L}{2} \left(\| v^m \|_V^2 + \sum_{i=1}^{m} \tau^2 \| z^i \|_V^2 \right)$,

~~con~~, trovo $N_m \leq S_m$ e inoltre

$$N_k \leq C_4 \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \tau N_i \right) + \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq m} N_i \quad \text{con } k \leq m,$$

scegliendo σ ad hoc. Ora max rispetto a k, scelgo poi τ piccolo e applico infine il lemma di Gronwall discreto.

Si fa così

$$\frac{1}{2} N_m \leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq m} N_i \leq C_4 \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \tau N_i \right)$$

da cui, prendendo $\tau \leq \dfrac{1}{4C_4}$, si trova

$$N_1 \leq 4C_4 \quad , \quad N_m \leq 4C_4 \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} \tau N_i \right)$$

per $m \geq 2$.

Applichiamo ora il lemma di Gronwall che viene dimostrato alla pagina seguente e troviamo

$$N_m \leq 4C_4 \, e^{4C_4 T} \qquad \text{per } m \geq 1$$

con $\beta = 4C_4$, $\gamma = 4C_4 \tau$ e dunque

$$N_m \leq 4C_4 \left(1 + \frac{4C_4 T}{n} \right)^{m-1}$$

$$\leq 4C_4 \left\{ \left(1 + \frac{4C_4 T}{n} \right)^{\frac{n}{4C_4 T}} \right\}^{4C_4 T} .$$

Gronwall discreto

$$S_1 \leq \beta, \quad S_m \leq \beta + \gamma \sum_{k=1}^{m-1} S_k \quad \text{per } m \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad S_m \leq \beta (1+\gamma)^{m-1}$$

Dim. Ok per $m=1$

Vera per m, la provo per $m+1$

$$S_{m+1} \leq \beta + \gamma \sum_{k=1}^{m} S_k \leq \beta + \beta\gamma \sum_{k=1}^{m} (1+\gamma)^{k-1}$$

$$\leq \beta + \beta\gamma \, \frac{1-(1+\gamma)^m}{1-(1+\gamma)}$$

$$= \beta (1+\gamma)^m$$

N.B. in generale γ per noi conterrà un τ.

Abbiamo dunque la stima

$$\|z_\tau\|^2_{L^\infty(0,T;H)} + \tau \|\hat{z}'_\tau\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|v_\tau\|^2_{L^\infty(0,T;V)} + \tau \|\hat{v}'_\tau\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_5$$

per ogni τ sufficientemente piccolo.

Da queste condizioni e da un semplice confronto deduciamo anche

$$\|\hat{u}_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq \|u_0\|_V + T\|\hat{u}'_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)}$$

$$\leq \|u_0\|_V + T\|v_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)}$$

$$\|\hat{v}_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} \left(\|v^i\|_V + \|v^{i-1}\|_V\right)$$

$$\leq 2\|v_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|v_0\|_V$$

$$\|\hat{v}_\tau\|_{W^{1,\infty}(0,T;H)} \leq \text{Costante dipendente da } C_S \text{ e } \|v_0\|_V.$$

Osserviamo anche che

$$\|f_\tau - f\|_{L^1(0,T;V')} = \sum_{i=1}^{n} \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \left\| \int_t^{i\tau} f'(s)\,ds \right\|_* dt$$

$$\leq \tau \|f'\|_{L^1(0,T;V')}$$

$$\|u_\tau - \hat{u}_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq \tau\|v_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C\tau.$$

Ora possiamo passare al limite debole star e concludere la dimostrazione.

Teorema di unicità e dipendenza continua

Esiste una costante C, che dipende solo da T, λ, L, M, c_V e non mi sembra da altro, tale che

$$\|u\|_{C^1([0,T];H)} + \|u\|_{C^0([0,T];V)}$$
$$\leq C\left(\|u_0\|_V + \|v_0\|_H + \|f_1\|_{W^{1,1}(0,T;V')} + \|f_2\|_{L^1(0,T;H)}\right).$$

Dimostrazione. Testo l'equazione per u' e ottengo

$$\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \frac{L}{2}\|u(t)\|_V^2 \leq \frac{1}{2}|v_0|^2 + \frac{1}{2}(\lambda+M)\|u_0\|_V^2$$
$$+ \lambda\int_0^t (u(s), u'(s))ds + \|f_1(t)\|_*\|u(t)\|_V$$
$$+ \|f_1(0)\|_*\|u_0\|_V + \int_0^t \|f_1'(s)\|_*\|u(s)\|_V ds$$
$$+ \int_0^t |f_2(s)|\,|u'(s)|ds$$

--- si prosegue poi in modo standard fino ad arrivare alla stima desiderata.

Oss.1 La stima effettivamente implica unicità e dipendenza continua dai dati.

<u>Oss. 2</u> Gap fra regolarità espressa dal teorema di esistenza e quello di unicità. Si può provare l'esistenza di una soluzione che ha la regolarità

$$u \in C^1([0,T];H) \cap C^0([0,T];V)$$

con $u'' = Au + f \in W^{1,1}(0,T;V') + L^1(0,T;H)$?

<u>Teorema di esistenza e unicità in un quadro debole.</u>

Se $u_0 \in V$, $v_0 \in H$, $f = f_1 + f_2 \in W^{1,1}(0,T;V') + L^1(0,T;H)$, allora esiste unica una soluzione

$$u \in C^1([0,T];H) \cap C^0([0,T];V)$$

del problema (P). Valgono inoltre uguaglianza e disuguaglianza dell'energia.

<u>Dim.</u> Il problema è approssimare i dati con dati più regolari a cui si possa applicare il teorema di esistenza precedente, poi usare la stima di unicità e dipendenza continua per provare che successioni $\{u_n\}$ e $\{u_n'\}$ sono di Cauchy in $C^0([0,T];V)$ e $C^0([0,T];H)$ rispettivamente, e passare al limite; anche in una versione di

$$u_n'' + Au_n = f_n$$

integrata rispetto al tempo.

Come approssimare però?

- $u_{0n} \in D(A)$ $\forall n$, $u_{0n} \to u_0$ in V;

è possibile perché $D(A)$ è denso in V, basta prendere

$$u_{0n} + \frac{1}{n}(\lambda u_{0n} + A u_{0n}) = u_0$$

e si prova che $u_{0n} \to u_0$ in V (convergenza debole più convergenza delle norme danno convergenza forte; in generale se $x_n \to x$ debole e $\|x_n\| \to \|x\|$ si ha

$$((x_n - x, x_n - x)) = \|x_n\|^2 - 2((x_n, x)) + \|x\|^2 \to 0),$$

usando il prodotto scalare definito da $a_\lambda(\cdot,\cdot)$ in V;

- $v_{0n} \in V \ \forall n$, $v_{0n} \to v_0$ in H;
- $f_{2n} \in C^1([0,T]; H) \ \forall n$, $f_{2n} \to f_2$ in $L^1(0,T;H)$ (basta prolungamento triviale + convoluzione con successione regolarizz. + troncamento a $[0,T]$)
- $f_{1n} \in W^{2,1}(0,T;V') \ \forall n$, $f_{1n}(0) \in H \ \forall n$, $f_{1n} \to f_1$ in $W^{1,1}(0,T;V')$

Si può forse prendere $f_{01n} \in H$ con

$$f_{01n} \to f_1(0) \quad \text{in } V'$$

e f_{1n} definita da $f_{1n}(t) = f_{01n} + \int_0^t g_n(s)\,ds$ con $g_n \to f_1'$ in $L^1(0,T;V')$.