Pierluigi COLLI **Programma del Corso 2006/07**

ANALISI C – 6 CFU – I Semestre

Integrale di Lebesgue

Introduzione: classi di funzioni integrabili secondo Riemann, esempi di funzioni non integrabili secondo Riemann, integrali impropri con conti per $x^{-\alpha}$ in $(0,1)$ e $(1,\infty)$, problematica del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Spazi di misura. Misura ordinaria sui rettangoli di $\mathbb{R}^N$ è $\sigma-$additiva. Subadditività, misura esterna, insiemi trascurabili. Proprietà della misura esterna: $m^*(B) = m(B)$ se B è unione finita di insiemi elementari, subadditività. Insieme di Cantor. Misura del contare e misura di Dirac. Proprietà vere q.o. Definizione di funzione f integrabile e di $\int_A f\,dm$: commenti, osservazioni, prime proprietà del nuovo integrale. Tre lemmi preparatori e poi giustificazione della definizione di integrale. Lemma: $\int_A |s_n - f|dm \to 0$ se $\{s_n\}$ è una successione nelle condizioni della definizione di integrale. Teorema importante che (riletto a posteriori) sancisce la completezza di $L^1(A)$ e la convergenza q.o. per una sottosuccessione. Teorema di Beppo Levi – I parte; osservazioni e corollari. Lemma di Fatou con varianti. Teorema di Lebesgue. Teorema di Beppo Levi – II parte; caso delle serie. Funzioni misurabili e condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Prorietà delle funzioni misurabili: in particolare, chiusura rispetto a lim, inf, lim inf . Insiemi misurabili e loro proprietà, in particolare $\sigma-$additività e continuità della misura e dell'integrale su sottoinsiemi misurabili. Aperti e chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili. Misura del contare e misura di Dirac: caratterizzazioni. Se f è misurabile, allora le controimmagini dei boreliani sono misurabili. Ancora sugli insiemi trascurabili, integrali di funzioni nulle q.o., continuità dell'integrale. Funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili anche secondo Lebesgue. Integrabilità su unione crescente e unione disgiunta. Integrabilità di $|x|^\alpha$ in più variabili. Integrale di Poisson. Non integrabilità di $\frac{\sin x}{x}$ in $(\pi, +\infty)$.

Spazi di Banach e di Hilbert

Richiami su spazi vettoriali e spazi normati: aperti, chiusi, successioni, funzioni continue tra spazi, operatori lineari, norme equivalenti. Spazi di Banach. Esempi di $\|\cdot\|_p$ in $\mathbb{R}^N$ ed esempio di $C^0(K)$ con $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$, che non sono tra loro equivalenti. Completezza di $C^0([0,1])$ con norma $\|\cdot\|_\infty$ e non completezza rispetto a $\|\cdot\|_1$. Spazi $L^1(B)$ con classi di funzioni tra loro uguali q.o. e richiamo completezza. Spazi prehilbertiani:

prodotto scalare, disuguaglianza di Schwarz, norma e identità del parallelogramma. Spazi di Hilbert. La regola del parallelogramma non vale in $C^0([0,1])$ e in $L^1(0,1)$. Esempi di spazi di Hilbert: $\mathbb{R}^N$, ℓ^2 e $L^2(B)$ con dimostrazioni della completezza in entrami i casi. Spazi $\ell^{(p)}$, loro inclusioni, esempi di sottospazi chiusi e densi. Spazi $L^p(\Omega)$, fra i quali anche $L^\infty(\Omega)$ con definizione della sua norma. Inclusioni e controesempi per gli spazi L^p. Relazioni tra convergenza in L^p e convergenza q.o. (anche solo per una sottosuccessione). Operatori lineari tra spazi normati sono continui se e solo se sono limitati. $\mathcal{L}(E,F)$ è completo se F è completo. Duale di uno spazio normato. Convessi chiusi non vuoti di uno spazio normato. Teorema delle proiezioni su un convesso chiuso non vuoto di uno spazio di Hilbert. Osservazioni ed esempi–controesempi. Proiezioni su sottospazi. Ortogonale di un sottoinsieme e teorema di decomposizione ortogonale. Teorema di rappresentazione di Riesz, commenti e osservazioni.

Serie di Fourier

Sistemi ortonormali completi. Esempi. Coefficienti di Fourier astratti. Problematica e teorema di Fisher-Riesz. Dimostrazione di alcuni lemmi preliminari. Teorema della migliore approssimazione, disuguaglianza di Bessel. Procedimenti di ortonormalizzazione; teorema di Schmidt. Caratterizzazioni dei sistemi completi e spazi separabili. Esistenza di un sistema completo per spazi separabili, con esempi. Funzioni periodiche e densità di $C^0(\mathbb{T})$ in $L^2(\mathbb{T})$ (senza dimostrazione). Polinomi trigonometricie serie di Fourier con sistema di seni e coseni. Nucleo di Dirichlet. Nucleo di Feyer e sua rappresentazione senza dimostrazione. Proprietà del nucleo di Feyer e teorema di convergenza uniforme di $K_n * f$ a f, densità dei polinomi trigonometrici, completezza del sistema $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Esempi di serie di Fourier: identità di Parseval e applicazioni al calcolo della somma di serie numeriche.