Complementi di Analisi Matematica II – 6 CFU – I Semestre

Successioni e serie di funzioni

Successioni di funzioni: convergenza puntuale ed uniforme. Definizioni, esempi, commenti. Proprietà che si conservano nella convergenza puntuale e/o uniforme: monotonia, limitatezza (uniforme o meno), continuità. Condizione di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme. Convergenza degli integrali nella convergenza uniforme. Convergenza uniforme di funzioni derivabili, derivabilità non garantita per funzione limite, esempi e teorema relativo alla convergenza uniforme delle derivate. Serie di funzioni: riepilogo risultati, convergenza totale e assoluta, criterio di Weierstrass. Derivazione e integrazione per serie. Serie di potenze ed esempi, raggio di convergenza, come si calcola. Teoremi sulla convergenza totale e sul raggio di convergenza di una serie di potenze. Osservazione sull'estensione dei risultati all'ambito complesso. Calcolo del raggio di convergenza ed esempi di serie di potenze con diverso comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza. Teorema su derivazione e integrazione delle serie di potenze. Serie di Taylor: esempi, problematica della convergenza, funzione ultrapiatta, funzioni sviluppabili in serie di Taylor, condizioni sufficienti per la sviluppabilità.

Serie di Fourier

Polinomi e serie trigonometriche, problematica convergenza puntuale e uniforme, periodicità. Condizioni sufficienti per la convergenza uniforme. Calcolo dei coefficienti di Fourier per una funzione integrabile secondo Riemann. Prova dell'ortonormalità del sistema dei seni e dei coseni. Serie di Fourier per funzioni pari e dispari. Lemma relativo alla disuguaglianza di Bessel. Convergenza puntuale di serie di Fourier e teorema relativo. Teorema di convergenza uniforme della serie di Fourier. Teorema di integrazione termine a termine. Esempi espliciti di serie di Fourier con applicazioni della convergenza al calcolo delle somme di serie numeriche.

Curve e forme differenziali

Curve nel piano: definizioni, sostegno, esempi. Curve semplici, chiuse, regolari. Retta tangente ad una curva, versore tangente, versore normale. Lunghezza di una curva. Curve regolari a tratti. Teorema di rettificabilità (senza dimostrazione). Curve equivalenti, classi di equivalenza, orientamento. Ascissa curvilinea. Integrale curvilineo di una funzione e indipendenza dalla parametrizzazione. Baricentro di una curva. Introduzione alle forme differenziali, esempi, differenziale di una funzione, integrale curvilineo di una forma. Integrale si conserva per parametrizzazioni con lo stesso orientamento. Forme esatte, teorema di caratterizzazione. Forme chiuse, teoremi riguardanti le relazioni tra forme esatte e forme chiuse. Insiemi semplicemente connessi, insiemi stellati. Curve tridimensionali ed estensione della teoria: curve regolari, integrali curvilinei, forme differenziali esatte e chiuse, aperti semplicemente connessi, campi vettoriali conservativi e irrotazionali. Metodi per il calcolo delle primitive di forme esatte.

Integrale di Lebesgue

Richiami a spazi elementari di misura. Spazi di misura. Misura ordinaria sui rettangoli di $\mathbb{R}^N$ è $\sigma-$additiva. Misura di Dirac e misura del contare. Misura esterna, insiemi trascurabili. Subadditività della misura esterna. Esempi di insiemi trascurabili. Proprietà vere q.o. Definizione di funzione f integrabile e di $\int_A f\,\mathrm{d}m$: commenti, osservazioni, prime proprietà del nuovo integrale. Tre lemmi preparatori (senza dimostrazione) e poi giustificazione della definizione di integrale. Lemma: $\int_A |s_n - f|\mathrm{d}m \to 0$ se $\{s_n\}$ è una successione nelle condizioni della definizione di integrale (senza dimostrazione) e teorema importante che (riletto a posteriori) sancisce la completezza dello spazio delle funzioni integrabili e la convergenza q.o. per una sottosuccessione. Problematica del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Teorema di Beppo Levi – I parte; osservazioni e corollari. Lemma di Fatou in versione base e poi con varianti. Teorema di Lebesgue. Teorema di Beppo Levi – II parte; caso delle serie.

Funzioni e insiemi misurabili

Funzioni misurabili e condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Proprietà delle funzioni misurabili: fra le altre, la chiusura rispetto a $\lim,\ \inf,\ \liminf$. Insiemi misurabili e loro proprietà, in particolare $\sigma-$additività e continuità della misura e dell'integrale su sottoinsiemi misurabili. Aperti e chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili. Ancora sugli insiemi trascurabili, insieme di Cantor, integrali di funzioni nulle q.o., continuità dell'integrale rispetto alla misura. Teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili anche secondo Lebesgue. Integrabilità su unione crescente e unione disgiunta. Applicazioni all'integrabilità di $x^{-\alpha}$ in $(0,1)$ e $(1,\infty)$. Equivalenze locali e confronti asintotici per valutare l'integrabilità di funzioni. Integrabilità di $|x|^{-\alpha}$ in più variabili. Integrale di Poisson. Misura del contare e misura di Dirac: caratterizzazione di funzioni misurabili e integrabili. Spazi di misure prodotto, teoremi di Fubini e Tonelli (senza dimostrazione) e applicazioni alla convoluzione.