COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 20 gennaio 2014

Esercizio 1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{2n}}{2n + e^{-n}}.$$

Valutare poi la misurabilità e l'integrabilità secondo Lebesgue della funzione somma della serie nell'intervallo aperto $(-R, R)$, dove R denota il raggio di convergenza della serie.

Esercizio 2. Posto $f(x) = (x - 2\pi)^2 \sin x^2$, $x \in [0, 2\pi]$, e

$$u_n = \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \quad v_n = \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

è possibile calcolare il valore dei seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty} u_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} v_n \text{ ?}$$

(NB: siamo interessati solo al valore dei limiti, non ai termini delle successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$). Dopo aver risposto a questa domanda, studiare il $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx + \sin x)\, dx$.

Esercizio 3. Dire, motivando la risposta, se la seguente forma differenziale

$$\omega(x; y; z) = (3z + 2)dx + 2ydy + (3x - 1)dz$$

è esatta in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e, nel caso, calcolare un potenziale.

Esercizio 4. Sia f una funzione continua e integrabile secondo Lebesgue in $[0, +\infty)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ mostrare che la funzione $h_n(x) = f(x + n)$, $x \geq 0$, è misurabile ed integrabile secondo Lebesgue in $[0, +\infty)$. Calcolare poi, motivando le risposte,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} h_n(x)dx.$$

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 13 febbraio 2014

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni

$$F_n(x) = \int_0^x \tanh\left(|t|^n t\right) dt, \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}.$$

a) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione delle derivate $\{F_n'\}$ in $\mathbb{R}$.

b) Per ogni $y \in \mathbb{R}$ calcolare esplicitamente $\lim_{n\to\infty} F_n(y)$.

c) Studiare la convergenza uniforme della successione $\{F_n\}$ nell'insieme $[-1, 1]$.

Esercizio 2. Sviluppare la funzione $g(x) = \sin(4x)$, $x \in \mathbb{R}$, in una serie di potenze reale di centro $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$. Una volta scritta la serie, calcolarne il raggio di convergenza.

Esercizio 3. Si individui nel piano cartesiano l'insieme $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + |y| \le 1\}$.

a) Si controlli che l'insieme A è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$.

b) Si discuta l'esattezza o meno della forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) dx + 2xy\, dy$$

sull'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus A$ (complementare di A in $\mathbb{R}^2$).

c) Indicata con γ la curva chiusa che ha come sostegno il bordo dell'insieme A, parte dal punto $(-1, 0)$ e viene percorsa una volta in senso antiorario, si calcoli

$$\int_\gamma \left(x^2 + y^2\right) dx + (2xy - 3x)\, dy.$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e non negativa tale che

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dm \ \text{ esiste finito (cioè, } f^2 \text{ è integrabile).}$$

In tali condizioni si può concludere che

a) f è integrabile in $\mathbb{R}$?

b) esiste una costante $C > 0$ tale che $0 \le f(x) \le C$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$?

c) posto $A_n = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \ge n\}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ converge?

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 30 giugno 2014

Esercizio 1. Studiare, al variare di $\alpha > 0$, la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+|x|)^{\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \pi^2 - 2\pi x & \text{per} \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi(x-\pi) & \text{per} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

si consideri la sua estensione $2\pi-$periodica a tutto $\mathbb{R}$. Dire, motivando per bene le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) la serie di Fourier di f, della forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$, converge puntualmente a f sull'intervallo $(0, 100\pi)$.

b) la serie di Fourier di f converge uniformemente a f sull'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.

c) la serie di Fourier di f converge a 0 per $x = -10\pi$.

d) il coefficiente a_0 vale 0.

Esercizio 3. Considerato l'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y > 0\}$,

a) si determinino le funzioni $\varphi(x, y, z)$, di classe C^1 in Ω, tali che la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = \varphi(x, y, z)dx + \frac{z}{x+y}dy + \ln(x+y)dz \quad \text{sia esatta in } \Omega.$$

b) Fissata ora a vostra scelta una delle funzioni $\varphi(x, y, z)$ che rendono esatta la forma ω, si determini una primitiva $f(x, y, z)$ della forma tale che $f(1, 0, 1) = 1$.

Esercizio 4. Siano $f(x) = 2^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e tale che $|g(x)| \leq 3$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$.

a) Studiare la convergenza q.o. in $\mathbb{R}$ delle successioni di funzioni

$$u_n(x) = f(x+n)g(x), \quad v_n(x) = f(nx)g(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Provare che u_n e vn sono integrabili in $\mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$ fissato.

c) Discutere i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} v_n(x)dx$$

eventualmente utilizzando teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 23 settembre 2014

Esercizio 1. Studiare la convergenza puntuale, per x che varia in $[0, 2\pi]$, della successione di funzioni $f_n(x) = n^{\sin x}$, determinando poi eventuali sottointervalli di $[0, 2\pi]$ in cui la successione converge uniformemente.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{6}{\pi}x^2 - 5x & \text{per} \quad -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{per} \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

si consideri la sua estensione $2\pi-$periodica a tutto $\mathbb{R}$. Dire, motivando per bene le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) la serie di Fourier di f, della forma $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$, converge puntualmente a f sull'intervallo $(0, 100\pi)$.

b) la serie di Fourier di f converge uniformente a f sull'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.

c) la serie di Fourier di f converge a 0 per $x = -9\pi$.

d) il coefficiente a_0 vale 0.

Esercizio 3. Si considerino le forme differenziali

$$\omega_1 := \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}\,dy, \qquad \omega_2 := \frac{x}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y}{x^2 + y^2}\,dy.$$

a) Determinare i domini Ω_1 e Ω_2 delle due forme e stabilire se esse sono chiuse nei rispettivi domini.

b) Calcolare gli integrali curvilinei $\displaystyle\int_\gamma \omega_1$ e $\displaystyle\int_\gamma \omega_2$ dove γ è la curva chiusa definita dall'equazione $x^2 + y^2 = 4$ percorsa una sola volta in senso antiorario.

Esercizio 4. Per n fissato in $\mathbb{N}$ controllare l'integrabilità secondo Lebesgue della funzione

$$g_n(x) = n^{\min\{0, \sin x\}}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

e studiare il $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,2\pi]} g_n(x)\,dx$.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 29 gennaio 2015

Esercizio 1. Per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ definiamo $f_n(x) := \sin(x/n)$.

a) Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$.

b) Studiare le analoghe convergenze per la successione delle derivate $\{f_n'\}$ in $\mathbb{R}$.

c) Per n fissato rappresentare f_n come somma di una serie di potenze con centro in 0, cioè del tipo
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(n)x^k,$$
(dove nella notazione dei coefficienti della serie viene sottolineata anche la dipendenza da n) e calcolare il raggio di convergenza di tale serie;

d) per k fissato calcolare $\lim_{n\to\infty} a_k(n)$ (limite fatto rispetto a n) e confrontare i risultati con i coefficienti delle serie di potenze relativa a $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri la forma differenziale
$$\omega := \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$
Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva chiusa regolare a tratti che costitusce la frontiera del rettangolo di vertici $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(1,2)$ percorsa una volta in senso orario a partire dal punto $(1,1)$.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{E}$ la famiglia che contiene tutti i sottoinsiemi $E \subset \mathbb{R}$ **limitati** più l'**insieme vuoto**. Si definisca poi la funzione di insieme
$$\nu(E) = \sum_{n\in E\cap\mathbb{Z}} \frac{1}{|n|+1}\,, \quad \text{per } E \in \mathcal{E}.$$

a) Provare che la terna $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, \nu)$ è uno spazio di misura.

b) Dare esempi di funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabili in $\mathbb{R}$ (rispetto alla misura ν) e possibilmente individuare la classe di tutte le funzioni integrabili.

Esercizio 4. Per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0,1]$ si consideri la funzione $u_n(x) = (n+1)x^n(1-x)$. Inoltre, sia v una funzione integrabile in $[0,1]$.

a) Discutere la misurabilità e l'integrabilità della funzione prodotto $x \mapsto u_n(x)v(x)$ sull'insieme $[0,1]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;

b) calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} u_n(x)v(x)dx$$
motivando per bene la risposta data.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 25 febbraio 2015

Esercizio 1. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^2}, \qquad x > 1,$$

a) studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie in $(1, +\infty)$;

b) detta $f(x)$ la somma della serie, si chiede se f è integrabile in $(1, +\infty)$;

c) è possible scambiare l'operazione di serie con quella di $\int_{(1,+\infty)}$?

Esercizio 2. Sia $f(x)$ la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \cos(x/2)$ per $x \in [-\pi, \pi)$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

b) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier ottenuta e calcolare la somma di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$.

Esercizio 3. Dare un esempio di curva piana γ tale che

- abbia $(0, 0)$ come punto iniziale e $(2, 0)$ come punto finale;
- non passi per il punto $(1, 0)$;
- abbia lunghezza esattamente uguale a 3π.

Scrivere esplicitamente una rappresentazione parametrica di γ. Considerata poi la forma differenziale

$$\omega := \frac{1}{(x-1)^2 + y^2}\, dx + \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}\, dy$$

calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$.

Esercizio 4. Determinare, giustificando per bene le risposte, il valore del limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_n} \frac{1 - 3^{-x}}{x^2 \tanh x} dx,$$

dove I_n è l'intervallo $I_n = [1/n, n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 15 giugno 2015

Esercizio 1. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \tanh n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie in $\mathbb{R}$;

b) detto $I \subset \mathbb{R}$ l'insieme di convergenza della serie e $f : I \to \mathbb{R}$ la funzione somma della serie, si chiede se f è integrabile secondo Lebesgue in I.

Esercizio 2. Sia $f(x)$ la funzione periodica di periodo 2π tale che

$$f(x) = 0 \ \text{ per } x \in (-\pi, 0], \qquad f(x) = 1 \ \text{ per } x \in (0, \pi].$$

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

b) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier ottenuta.

Esercizio 3. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega := ye^{-x^2}\, dx + e^{-y^2}\, dy$$

sul quadrato che ha come vertici i punti $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ percorso una volta in senso orario partendo da $(0,0)$.

Esercizio 4. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non decrescente. Calcolare, motivando adeguatamente la risposta data, il

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f\left(\frac{nx+1}{nx+2}\right) dx.$$

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Scrittino 6 luglio 2015

Esercizio 1. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = e^{x+y^2}dx + 2ye^{x+y^2}dy$$

e sia inoltre γ_N la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio N percorsa una volta in senso antiorario a partire dal punto $(N,0)$. Calcolare, giustificando la risposta data, il

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_N} \omega.$$

Esercizio 2. Posto, per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{se } \ n < x < n+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

si risponda alle seguenti domande.

a) Perché le funzioni f_n sono (misurabili e) integrabili in $\mathbb{R}$?

b) Studiare la convergenza q.o. della successione $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$.

c) È possibile applicare alla successione $\{f_n\}$ i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale? Se si, quali? Se no, perché?

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 3 settembre 2015

Esercizio 1. Fornire tre esempi di serie di potenze reali, del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, rispettivamente con le seguenti caratteristiche:

a) raggio di convergenza infinito e centro nel punto $x_0 = 3$;

b) raggio di convergenza 3π e serie che **non converge** per $x = 0$;

c) raggio di convergenza 2 e serie che **converge uniformemente** nell'intervallo chiuso $[-2, 2]$.

Esercizio 2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y) = (x + y)dx + (y - 1)dy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sia inoltre γ_n la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio n percorsa una volta in senso antiorario a partire dal punto $(n, 0)$, con $n \in \mathbb{N}$. Calcolare, giustificando la risposta data, il

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \omega.$$

Esercizio 3. Posto, per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} (3x+2)^{-1} & \text{se } \; n < x < n+1, \\ 0 & \text{altrove ,} \end{cases}$$

si risponda alle seguenti domande.

a) Perché le funzioni f_n sono (misurabili e) integrabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$?

b) Studiare la convergenza q.o. della successione $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$.

c) È possibile applicare alla successione $\{f_n\}$ i teoremi di Beppo Levi della convergenza monotona o di Lebesgue della convergenza dominata per passare al limite sotto il segno di integrale?

d) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx$.

Esercizio 4. Se B è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; |y| > 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x(1 + y^2) \le 1\}$$

provare che B è misurabile secondo Lebesgue e calcolarne la misura, sia essa finita oppure infinita.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 22 settembre 2015

Esercizio 1. Posto, per $n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$,

$$f_n(x) = e^{-nx} \ln(nx),$$

a) studiare la convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ in $(0, +\infty)$;

b) la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $(0, +\infty)$?

c) è vero o falso che per ogni $r > 0$ la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[r, +\infty)$?

Esercizio 2. Sia $f(x)$ la funzione periodica di periodo 2π tale che

$$f(x) = 1 \quad \text{per } x \in (-\pi, 0], \qquad f(x) = 0 \quad \text{per } x \in (0, \pi].$$

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

b) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier ottenuta.

Esercizio 3. Si considerino la forma differenziale

$$\omega(x, y) = (x^2 + y^2)dx + 2xy\, dy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\gamma(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [-\pi, 2\pi]$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$.

Esercizio 4. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} g_n(x), \qquad \text{dove } \ g_n(x) = \frac{1}{nx^{1/n}}, \quad x \in (0, 1).$$

a) Perché le funzioni g_n sono (misurabili e) integrabili secondo Lebesgue in $(0, 1)$?

b) Studiare la convergenza della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \int_{(0,1)} g_n(x)dx$.

c) È possibile applicare alla serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} g_n$ qualche teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale?

d) Studiare la convergenza q.o. della serie di funzioni.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 18 gennaio 2016

Esercizio 1. Posto $[\,t\,] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le t\}$ per $t \in \mathbb{R}$, sia $f(x)$ la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = [2x/\pi]$ per $x \in [-\pi, \pi)$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

b) Discutere la convergenza della serie di Fourier nel punto $x = \pi/2$.

Esercizio 2. Posto $g(x) = 2^{-|x|}$ e $f_n(x) = g(n(x-n))$ per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Provare la convergenza puntuale della serie.

b) Discutere la convergenza uniforme della serie in $\mathbb{R}$ o, eventualmente, in sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

c) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, controllare l'integrabilità della funzione f_n in $\mathbb{R}$.

d) La funzione somma della serie è integrabile? La serie degli integrali converge?

Esercizio 3. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = \frac{y^2 z^2 - 2x^2 y^2}{(z^2 + 2x^2)^2}\, dx + \frac{2xy}{z^2 + 2x^2}\, dy - \frac{2xy^2 z}{(z^2 + 2x^2)^2}\, dz$$

nello spazio $\mathbb{R}^3$ e

a) si individui il suo dominio A.

b) Si discuta poi l'esattezza o meno della forma.

c) Osservato che il sostegno della curva γ descritta dalla parametrizzazione $\gamma(t) = (\cos t, t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, è contenuto in A, calcolare $\int_\gamma \omega$.

Esercizio 4. Giustificare la misurabilità secondo Lebesgue dell'insieme bidimensionale

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \sqrt{|x|}\,(|y| + 1) \le 1\Big\}$$

e calcolarne la misura, sia essa finita oppure infinita.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 16 febbraio 2016

Esercizio 1. Posto, per $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+nx)^\alpha}, \quad x \geq 0,$$

discutere, al variare di α in $\mathbb{R}$, la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $\{f_n\}$ in $[0, +\infty)$.

Esercizio 2. Studiare la serie di potenze reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{\ln(n+1)}(2x+1)^{3n+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

e, in particolare, determinare centro x_0 e raggio di convergenza ρ. Valutare poi il comportamento della serie nei punti $x = x_0 \pm \rho$.

Esercizio 3. Sia $\omega(x,y) = \dfrac{1-y}{x^2+(y-1)^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+(y-1)^2}\,dy$: per questa forma differenziale nel piano

a) individuare il dominio A.

b) Discutere chiusura ed esattezza della forma.

c) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{\gamma_q} \omega$, dove γ_q è il quadrato di vertici $(1,0)$, $(1,2)$, $(-1,2)$, $(-1,0)$ percorso una volta in senso antiorario.

d) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{\gamma_e} \omega$, dove γ_e è l'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ percorsa una volta in senso antiorario a partire dal punto $(1,0)$.

Esercizio 4. Sia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile, non negativa, integrabile (secondo Lebesgue) su ogni intervallo limitato (a,b) con $0 < a < b < +\infty$, e tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Dire se le seguenti affermazioni sono sempre vere o possono essere false, motivando per bene le risposte fornite.

a) f è integrabile in $(1,+\infty)$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{(n\,,\,n+1)} f(x)dx = 0$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{(n^2\,,\,(n+1)^2)} f(x)dx = 0$.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Scrittino del 13 giugno 2016

Esercizio 1. Sia $\omega(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y}\,dx + \Big(\ln|x^2+y| + \dfrac{y}{x^2+y}\Big)dy$: per questa forma differenziale nel piano

a) individuare il dominio A.

b) Discutere la chiusura della forma in A.

c) Dire se ω è esatta in A: se la risposta è affermativa, calcolarne tutte le primitive.

Esercizio 2. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}\,, \qquad x \geq 0,$$

a) studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie in $[0,+\infty)$;

b) detta $f(x)$ la somma della serie, si chiede se f è integrabile in $[0,+\infty)$;

c) è possible scambiare l'operazione di serie con quella di $\int_{[0,+\infty)}$?

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Scrittino del 4 luglio 2016

Esercizio 1. Scrivere un esempio di serie di potenze reale del tipo

$$\sum a_n(x - x_0)^n$$

che **converga uniformemente** nell'intervallo $[3, 7)$ e al contempo **non converga** per $x \in [0, 3)$.

Esercizio 2. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx}, \quad x \in (0, 1), \quad n \in \mathbb{N},$$

a) studiare la convergenza q.o. di $\{f_n\}$ in $(0, 1)$;

b) le funzioni f_n sono integrabili in $(0, 1)$?

c) esiste finito il

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)dx \; ?$$

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Scrittino del 30 agosto 2016

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $2\pi-$periodica definita da $f(x) = x|x|$ per $x \in (-\pi, \pi]$.

a) Sviluppare f in serie di Fourier della forma $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$;

b) discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie trovata.

Esercizio 2. Posto, per $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } \ -1 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{se } \ |x| > 1 \end{cases} ,$$

sia $\{f_n\}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = ng(nx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

a) Dire perché le funzioni f_n sono integrabili;

b) studiare la convergenza q.o. di $\{f_n\}$;

c) valutare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$$

e confrontarlo con

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)(x)dx.$$

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Scrittino del 27 settembre 2016

Esercizio 1. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = (x+1)dx + (y-x)dy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sia inoltre γ la curva chiusa che costituisce la frontiera dell'insieme bidimensionale

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| < 1\right\},$$

percorsa una volta in senso antiorario partendo dal punto $(1,0)$. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \omega.$$

Esercizio 2. Studiare la convergenza quasi ovunque della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh(nx)}{n}\, x^{2n+1}$$

in $\mathbb{R}$. Valutare poi la misurabilità e l'integrabilità secondo Lebesgue della funzione somma della serie nell'intervallo di convergenza o, eventualmente, in sotto-intervalli.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 17 gennaio 2017

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Si determini l'insieme C di convergenza per $\{f_n\}$, cioè l'insieme $C \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\{f_n(x)\}$ converge se $x \in C$ e non converge se $x \notin C$, e si individui la funzione limite f definita su C.

b) studiare la convergenza uniforme di f_n a f in C.

Esercizio 2. Data la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}\ln\left(y^2+z^2\right) + \frac{y^2+z^2}{2x}\right)dx + \left(\frac{xy}{y^2+z^2} + y\ln x\right)dy + \left(\frac{xz}{y^2+z^2} + z\ln x\right)dz$$

nello spazio $\mathbb{R}^3$,

a) si individui il suo dominio A, cioè l'aperto di $\mathbb{R}^3$ sul quale è definita la forma.

b) Si discuta la chiusura della forma in A.

c) L'aperto A è semplicemente connesso?

d) La forma ω è esatta in A?

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, pari e integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$. Inoltre sappiamo che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 2\pi.$$

Posto $g_n(x) = f(x+n)$ per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

a) provare che per n fissato la funzione g_n è integrabile in $[0,+\infty)$;

b) discutere la convergenza o meno della successione $\left\{\int_{(0,+\infty)} g_n(x)dx\right\}$ e, in caso di convergenza, calcolarne il limite per $n \to +\infty$.

Esercizio 4. Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrabilità secondo Lebesgue in $(0,+\infty)$ della seguente funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-2\alpha x}}{e^{3x}\ln\left(1+\sqrt[3]{x^{\alpha-2}}\right)}, \qquad x > 0.$$

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 16 febbraio 2017

Esercizio 1. Posto $f_n(x) = \left(1+n^2\right)^{-1} \arctan(x+n)\cos\left(n^2 x\right)$ per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, si consideri la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$

a) Discutere la convergenza uniforme della serie in $\mathbb{R}$ o, eventualmente, in sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

b) Scrivere la serie delle derivate, cioè la serie di funzioni con termini $f_n'(x)$, e studiarne la convergenza uniforme.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$.
[*Suggerimento: calcolare i coefficienti* a_0 *e* a_1 *separatamente*]

b) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier ottenuta.

Esercizio 3. Sia $\omega(x,y) = \dfrac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dx - \dfrac{4x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dy$: per questa forma differenziale nel piano

a) individuare il dominio A;

b) calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$, dove γ è la poligonale costituita dai tre segmenti di estremi $(0,-1)$ e $(-1,0)$; $(-1,0)$ e $(2,1)$; $(2,1)$ e $(1,0)$.

Esercizio 4. Posto, per $x \in (0,+\infty)$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{nx}} & \text{se } 0 < x < n, \\ 0 & \text{altrove }, \end{cases}$$

si risponda alle seguenti domande.

a) Dimostrare che $|f_n(x)| \le \min\{1, 1/x\}$ per ogni $x > 0$ e per ogni $n \ge 1$.

b) Studiare la convergenza q.o. della successione $\{f_n\}$ in $(0,+\infty)$.

c) È possibile applicare alla successione $\{f_n\}$ i teoremi di Beppo Levi della convergenza monotona o di Lebesgue della convergenza dominata per passare al limite sotto il segno di integrale?

d) Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{(0,+\infty)} f_n(x)\,dx$.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Scrittino del 14 giugno 2017

Esercizio 1. Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+2y}{x^2+y^2}\,dy,$$

a) determinare il suo dominio.

b) Dire, motivando per bene la risposta, se la forma differenziale ω è esatta.

c) Calcolare, al variare di $\rho > 0$, l'integrale di ω lungo la circonferenza γ_ρ di centro l'origine e raggio ρ, percorsa una volta in senso orario a partire dal punto $(-\rho, 0)$.

Esercizio 2. Posto, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in (0, +\infty)$, $f_n(x) = (\tanh(1/x))^{n-7}$,

a) studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione f_n in $(0, +\infty)$.

b) Discutere, per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ e con n fissato, l'integrabilità su $(0, +\infty)$ della funzione f_n.

c) Esiste il $\lim_{n\to\infty} \int_{(0,+\infty)} f_n(x)dx$? Motivare per bene la risposta.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Scrittino del 3 luglio 2017

Esercizio 1. Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{2x+y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy,$$

a) determinare il suo dominio.

b) Dire, motivando per bene la risposta, se la forma differenziale ω è esatta.

c) Calcolare, al variare di $\rho > 0$, l'integrale di ω lungo la circonferenza γ_ρ di centro l'origine e raggio ρ, percorsa una volta in senso antiorario a partire dal punto $(0, \rho)$.

Esercizio 2. Posto, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in (0, +\infty)$,

$$f_n(x) = \arctan x^{5-2n},$$

a) studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione f_n in $(0, +\infty)$.

b) Discutere, per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ e con n fissato, l'integrabilità su $(0, +\infty)$ della funzione f_n.

c) Esiste il $\lim_{n\to\infty} \int_{(0,+\infty)} f_n(x)dx$? Motivare per bene la risposta.

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 31 luglio 2017

Esercizio 1. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2n)^3}, \qquad x \geq 0,$$

a) studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie in $[0, +\infty)$;

b) detta $f(x)$ la somma della serie, si chiede se f è integrabile in $[0, +\infty)$;

c) è possible scambiare l'operazione di serie con quella di $\int_{[0,+\infty)}$?

Esercizio 2. Sia $f(x)$ la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = |\sin(x/2)|$ per $x \in [-\pi, \pi)$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

b) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier ottenuta.

Esercizio 3. Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{2x}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x+2y}{x^2+y^2}\, dy,$$

a) determinare il suo dominio.

b) Dire, motivando per bene la risposta, se la forma differenziale ω è esatta.

c) Calcolare, al variare di $R > 0$, l'integrale di ω lungo la circonferenza γ_R di centro l'origine e raggio R, percorsa una volta in senso orario a partire dal punto $(-R, 0)$.

Esercizio 4. Sia f una funzione continua e integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ mostrare che la funzione $g_n(x) = f(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, è misurabile ed integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$. Calcolare poi, motivando le risposte,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx.$$

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Scrittino del 27 settembre 2017

Esercizio 1. Posto, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \max\{1 - x^2, 0\}, \quad f_n(x) = u(nx),$$

si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

a) Studiare la convergenza puntuale della serie in $\mathbb{R}$.

b) Individuare eventuali sottoinsiemi S di $\mathbb{R}$ su cui la serie converge uniformemente, motivando per bene la risposta.

c) Indicata con g una funzione definita in $\mathbb{R}$ tale che $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$, discutere misurabilità e integrabilità secondo Lebesgue della funzione g.

Esercizio 2. Data la forma differenziale nello spazio:

$$\omega := \left(-\frac{yz}{(1+x)^2} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{z}{x+1} - \frac{x}{y^2} + \frac{1}{z-1}\right) dy + \left(\frac{y}{x+1} - \frac{y}{(z-1)^2}\right) dz,$$

a) determinare il suo dominio e studiarne la connessione.

b) Dire, motivando per bene la risposta, se la forma differenziale ω è esatta.