TESTI DELLE PROVE SCRITTE DI ANALISI MATEMATICA 4 DA GENNAIO 2013

ORDINATE PER ANNO

IN ORDINE CRONOLOGICO INVERSO

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 10 gennaio 2023

Esercizio 1. Posto, per $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$, $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha}{(x+1)^{n+1}}$, si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

a) Per $n \in \mathbb{N}$ fissato, discutere l'integrabilità delle funzioni f_n in $(0, +\infty)$ rispetto alla misura μ di Lebesgue.

b) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si discuta la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura per la serie di funzioni.

c) indicata con $s_\alpha(x)$ la somma della serie per gli $\alpha \in \mathbb{R}$ e gli $x \in (0, +\infty)$ per cui è definita, studiare l'integrabilità secondo Lebesgue di s_α.

Esercizio 2. In questo esercizio ci occupiamo delle funzioni $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ a variazione limitata e indichiamo con $V_{[-1,1]}(f)$ la variazione totale di f nell'intervallo $[-1, 1]$.

a) Ricordare le definizioni di funzione a variazione limitata e di variazione totale, ed enunciare il risultato che lega le funzioni a variazione limitata alle funzioni monotone crescenti nello stesso intervallo.

b) Dimostrare che se $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è a variazione limitata in $[-1, 0]$ e in $[0, 1]$ separatamente, allora f è a variazione limitata in $[-1, 1]$.

c) Provare che l'insieme $BV([-1, 1])$ delle funzioni $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ a variazione limitata è uno spazio vettoriale.

d) Posto, per $f \in BV([-1, 1])$, $\|f\| = \int_{[-1,1]} |f(x)|dx + V_{[-1,1]}(f)$, l'integrale essendo inteso nel senso di Lebesgue, discutere se $\| \cdot \|$ definisce effettivamente una norma in $BV([-1, 1])$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ si considerino le norme

$$\|x\|_p := \big(|x_1|^p + |x_2|^p\big)^{1/p} \quad \text{se } 1 \le p < \infty; \quad \|x\|_\infty := \max\big\{|x_1|, |x_2|\big\}, \quad \text{per } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Dimostrare che $\| \cdot \|_\infty$ è equivalente a $\| \cdot \|_p$ per qualunque $p \in [1, \infty)$.

b) Se A è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ dato dal segmento di estremi $(1, 0)$ e $(0, 1)$, con estremi inclusi, provare che A è convesso e chiuso in $\big(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_p\big)$ per qualunque $p \in [1, \infty]$.

c) Per ogni $p \in [1, \infty]$ calcolare la distanza, espressa in norma $\| \cdot \|_p$, del punto $(0, 0)$ dall'insieme A e trovare i punti di A che realizzano tale distanza.

Esercizio 4. Siano $X = L^2(-\pi, \pi)$ reale e $V = \Big\{f \in X : \int_{(-\pi,\pi)} f(x)dx = 0\Big\}$.

a) Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di X. È anche chiuso in X? In ogni caso individuare il sottospazio $V^\perp$.

b) V è dunque spazio prehilbertiano rispetto allo stesso prodotto scalare di X. V è anche completo, cioè risulta esso stesso uno spazio di Hilbert?

c) Provare che V ammette un sistema ortonormale completo.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 20 febbraio 2023

Esercizio 1. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$, misurabili secondo Lebesgue e tali che $-1 \leq f_n(x) \leq |x|^{-1/2}$ q.o. in $(-1,1)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, sappiamo che la successione $\{f_n\}$ converge a una funzione f in misura.

a) Richiamare la convergenza in misura in $(1,1)$ per $\{f_n\}$ e provare che esiste una sottosuccesione $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k} \to f$ q.o. e in $L^1(-1,1)$.

b) Dimostrare in seguito che per ogni p con $1 \leq p < 2$ si hanno le convergenze $f_n \to f$ in $L^p(-1,1)$ per tutta la successione.

c) Costruire un esempio di successione $\{f_n\}$ nelle condizioni dell'enunciato e tale che $f_n \not\to f$ in $L^2(-1,1)$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$, dove $\mathcal{L}$ sta per la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e μ denota la misura di Lebesgue.

a) Richiamare la definizione di misura relativa su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ ed enunciare il teorema di Hahn di decomposizione di una misura relativa;

b) dare un esempio di misura relativa φ che sia μ-assolutamente continua e tale che

$$\varphi([-2,2]) = 1, \qquad \varphi((0,1)) = -2, \qquad \varphi((-1,+\infty)) = 3;$$

c) dare un esempio di misura relativa ψ che sia μ-singolare e che soddisfi le stesse misurazioni espresse qui sopra per φ;

d) per entrambe le misure scrivere esplicitamente una decomposizione di Hahn di $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia $z = (z_k)$ un elemento fissato nello spazio c_0 delle successioni reali infinitesime. Ora, nello spazio ℓ^1 delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty$ si consideri l'operatore $T : \ell^1 \to \ell^1$ che a $x = (x_k)$ associa $y = Tx$ con $y_k = z_k x_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

a) Provare che T è ben definito, lineare e continuo.

b) Calcolare la norma $\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^1;\ell^1)}$.

c) È possibile dare condizioni su $z = (z_k)$ al fine di garantire iniettività e/o suriettività dell'operatore T?

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita da $f(x) = \dfrac{|x|}{\pi}$ per $-\pi \leq x < \pi$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier.

b) Discutere convergenza puntuale, uniforme e in $L^2(-\pi,\pi)$ della serie di Fourier di f.

c) In base ai risultati trovati, calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 13 giugno 2023

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \sqrt{n}\, e^{-n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ per } n \in \mathbb{N}.$$

a) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$;

b) discutere l'integrabilità delle funzioni f_n in $\mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$ fissato, rispetto alla misura μ di Lebesgue su $\mathbb{R}$;

c) indicata con f la funzione limite delle f_n, si chiede se

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \quad \text{esiste e vale} \quad \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu\,.$$

Esercizio 2. Nello spazio di Hilbert reale $H = L^2(0,1)$ si consideri il sottoinsieme $K = \left\{ v \in H \,:\, \int_{(0,1)} |v(x)|^2 \,\mathrm{dx} \leq 2 \right\}$.

a) Dimostrare che K è non vuoto, convesso e chiuso in H.

b) Ricordare il teorema delle proiezioni e trovare esplicitamente la proiezione della funzione $f(x) = 3x$, $x \in (0,1)$, su K.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 13 luglio 2023

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ per } n \in \mathbb{N}.$$

a) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$;

b) discutere l'integrabilità delle funzioni f_n in $\mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$ fissato, rispetto alla misura μ di Lebesgue su $\mathbb{R}$;

c) indicata con f la funzione limite delle f_n, si chiede se

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \quad \text{esiste e vale} \quad \int_{\mathbb{R}} f d\mu\,.$$

Esercizio 2. Nello spazio di Hilbert reale $H = L^2(1, +\infty)$ si consideri il sottoinsieme

$$K = \{v \in H \; : \; |v(x)| \leq 2 \text{ per q.o. } x \in (1, +\infty)\}\,.$$

a) Provare che K è non vuoto, convesso e chiuso in H.

b) Ricordare il teorema delle proiezioni e trovare esplicitamente la proiezione su K della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{x} & \text{se } x \in (1,5), \\ 0 & \text{se } x \in [5, +\infty). \end{cases}$$

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 30 agosto 2023

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{n}{2}\, e^{-n^2|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \ \text{per} \ n \in \mathbb{N}.$$

a) Provare che $f_n \to 0$ q.o. in $\mathbb{R}$. Discutere anche le convergenze quasi uniforme e in misura di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$.

b) Per $n \in \mathbb{N}$ fissato provare l'integrabilità della funzione f_n in $\mathbb{R}$.

c) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ calcolare le norme $\|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ e $\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

d) Discutere, usando eventualmente le conclusioni di **c)**, la convergenza $f_n \to 0$ in $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di Banach ℓ^1 delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ converga, munito dell'usuale norma. Inoltre, per ogni intero $n \geq 1$ sia T_n l'operatore da ℓ^1 in sè che a $x = (x_k)$ associa $y = T_n x$ con

$$y_k = \begin{cases} x_k & \text{per } \ k < n \\ 0 & \text{per } \ k = n \\ x_{k-1} & \text{per } \ k > n \end{cases} .$$

a) Provare che per n fissato T_n è lineare e continuo.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ calcolare $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^1;\ell^1)}$.

c) Per $n \in \mathbb{N}$ fissato studiare iniettività e suriettività dell'operatore T_n.

d) Per $x = (x_k)$ fissato in ℓ^1, possiamo concludere che $T_n x \to x$ in ℓ^1 per $n \to \infty$?

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 25 settembre 2023

Esercizio 1. Si considerino le funzioni $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ \sqrt{\dfrac{n}{nx+1}} & \text{if } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases} \qquad \text{per } n \in \mathbb{N} \ (n \geq 1).$$

a) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di $\{f_n\}$ in $[0, 1]$ e individuare la funzione limite f;

b) discutere l'integrabilità secondo Lebesgue delle funzioni f_n per $n \in \mathbb{N}$ fissato e della funzione limite f in $[0, 1]$;

c) si chiede ora se

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \quad \text{esiste e vale} \quad \int_{\mathbb{R}} f d\mu \, .$$

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di Hilbert ℓ^2 delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Si definisca poi

$$K = \Big\{ x = (x_k) \in \ell^2 : \sum_{k=1}^{10} |x_k|^2 \leq 1 \Big\}.$$

Svolgere i seguenti punti motivando opportunamente le risposte date.

a) Provare che K è convesso e chiuso in ℓ^2.

b) Quali degli elementi e^n della base canonica, cioè quelli che hanno la n-ima componente ugale a 1 e tutte le altre uguali a 0, appartengono a K?

c) Mostrare che l'elemento $w = (w_k)$, con $w_k = 1/k$ per $k \in \mathbb{N}$, appartiene ad ℓ^2, ma non appartiene a K.

d) Ricordare il teorema delle proiezioni e calcolare esplicitamente la proiezione dell'elemento w su K.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 11 gennaio 2022

Esercizio 1. Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo $f_n(x) := \dfrac{|\ln(n^7 x^2)|}{3 + n^4 x^2}$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f_n(0) := 1$.

a) Discutere l'integrabilità secondo Lebesgue della funzione f_n in $\mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$ fissato.

b) Studiare la convergenza quasi ovunque della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Se $C \subseteq \mathbb{R}$ indica l'insieme degli x in cui la serie converge e $s : C \to \mathbb{R}$ denota la somma della serie, discutere la misurabilità dell'insieme C e della funzione s.

c) Vale la seguente uguaglianza $\int_C s\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n\,dx$? e inoltre $s \in L^1(C)$?

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri interi positivi e $\#$ denota la misura del contare. Data una successione reale non negativa $\{a_n\}$, definiamo

$$\varphi(E) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \delta_n(E) \quad \text{per ogni insieme } E \subseteq \mathbb{N}, \tag{$\diamond$}$$

dove δ_n indica la misura di Dirac concentrata in n, per $n \in \mathbb{N}$.

a) Provare che φ è una misura su $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$; φ è $\#$-assolutamente continua o $\#$-singolare?

b) Se ora $\{a_n\}$ denota una successione reale di segno qualunque, dare condizioni su $\{a_n\}$ affinchè φ in $(\diamond)$ sia ben definita e risulti una misura relativa [Suggerimento: $a_n = (-1)^n/n$ non funziona, perchè?].

c) Dare un esempio di successione $\{a_n\}$ nelle condizioni di b) per la quale risulti $\varphi(\mathbb{N}) = 1$ e al contempo $\varphi(\{k \in \mathbb{N} : k \text{ è primo }\}) = -5$.

Esercizio 3. Per $f \in L^2(1, +\infty)$ definiamo la successione

$$z = (z_n), \quad \text{con} \quad z_n = \int_{(n,n+1)} \frac{f(x)}{x}\,dx \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

l'integrale essendo inteso nel senso di Lebesgue.

a) Provare che l'operatore T che associa a f la successione $z = (z_n)$ è ben definito da $L^2(1, +\infty)$ in ℓ^1, cioè che $z \in \ell^1$ per ogni $f \in L^2(1, +\infty)$.

b) Dimostrare che T è lineare e limitato da $L^2(1, +\infty)$ in ℓ^1.

c) L'operatore T è iniettivo? è suriettivo?

Si intende che tutti gli spazi normati considerati sono reali.

Esercizio 4. Siano H e V due spazi di Hilbert reali, entrambi contenenti almeno un elemento di norma non nulla, con norme hilbertiane $\|\cdot\|_H$ e $\|\cdot\|_V$. Nello spazio prodotto $W = H \times V$ si considerino le norme

$$\|(u,v)\|_1 := \|u\|_H + \|v\|_V, \quad \|(u,v)\|_2 := \left(\|u\|_H^2 + \|v\|_V^2\right)^{1/2}, \quad (u,v) \in W.$$

Non è richiesta la verifica che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ siano norme.

a) Dimostrare che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti.

b) Controllare che $\|\cdot\|_2$ è indotta da un prodotto scalare. Per quanto riguarda $\|\cdot\|_1$, scegliendo opportunamente due coppie $(u,v), (u',v') \in W$ provare che $\|\cdot\|_1$ non verifica l'identità del parallelogramma.

c) Nel caso $H = V = \mathbb{R}$ con $\|\cdot\|_H = \|\cdot\|_V = |\cdot|$, determinare il più piccolo insieme convesso e chiuso di W contenente l'insieme $A := \{(u,v) \in W \;:\; \|u\|_H^{1/2} + \|v\|_V^{1/2} \le 1\}$ (eventualmente A stesso, se A è convesso e chiuso). Inoltre, se P è l'operatore di proiezione sul sottospazio $H \times \{0\}$, caratterizzare l'insieme $P(A)$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 24 febbraio 2022

Esercizio 1. Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia $\{z_n\}$ una successione di funzioni misurabili definite su Ω a valori in $\mathbb{R}$. Tale successione risulta convergente q.o. in Ω a una funzione z. Si abbia inoltre

$$\int_\Omega e^{z_n(x)}dx \leq 100 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

a) Discutere la convergenza quasi ovunque della successione $\{e^{z_n}\}$.

b) Le funzioni z ed e^z risultano misurabili?

c) La funzione e^z è integrabile in Ω oppure non possiamo concludere nulla sull'integrabilità di e^z?

Esercizio 2. Ci occupiamo di funzioni reali definite nell'intervallo $[-1, 1]$.

a) Adattare le definizioni di funzione a variazione limitata e funzione assolutamente continua in $[-1, 1]$; dire per quali funzioni esiste la derivata q.o. e per quali vale la formula fondamentale del calcolo (estesa all'integrale di Lebesgue).

b) Calcolare la derivata q.o. g' della funzione $g(x) = |x|^{\pi/5}$, $x \in [-1, 1]$. La funzione g è assolutamente continua in $[-1, 1]$? Motivare per bene la risposta.

c) Determinare per quali $p \in [1, \infty]$ la g' di cui in b) appartiene ad $L^p([-1, 1])$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio $X = L^1(\mathbb{R})$ e, per ogni intero $n \geq 1$, sia T_n l'operatore lineare (non si richiede il controllo della linearità) da X in sé che a u associa $v = T_n(u)$ con $v(x) = u(x)$ per $x < 0$, $v(x) = u(x + n)$ per $x \geq 0$.

a) Provare che per n fissato T_n è ben definito (cioè, $T_n(u) \in X$ per ogni $u \in X$) e continuo.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ calcolare $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X;X)}$.

c) Per n fissato studiare iniettività e suriettività dell'operatore T_n.

d) Per $u \in X \equiv L^1(\mathbb{R})$ fissata, studiare la convergenza, quasi ovunque e in $L^1(\mathbb{R})$, della successione di funzioni $\{T_n(u)\}$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita da $f(x) = \pi + x$ per $-\pi < x \leq 0$, e da $f(x) = x - \pi$ per $0 < x \leq \pi$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier.

b) Detta $S(x)$ la somma della serie, dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sia ha che $S(x) \neq f(x)$.

c) In base ai risultati trovati, calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 14 giugno 2022

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \min\left\{\frac{1}{n}\,,\,\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N},\ \ x > 0,$$

a) discutere la misurabilità delle funzioni $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ rispetto alla misura unidimensionale μ di Lebesgue ;

b) per $n \to \infty$ studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione $\{f_n\}$ in $(0, +\infty)$;

c) per $n \in \mathbb{N}$ fissato, determinare per quali p, con $1 \le p \le \infty$, vale l'inclusione $f_n \in L^p(0, +\infty)$;

d) indicata con f la funzione limite q.o. delle f_n, si chiede per quali valori dei $p \in [1, \infty]$ di cui al punto c) si abbia $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(0,+\infty)} = 0$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di Hilbert reale $H = L^2(-1, 1)$ e si definisca

$$C = \left\{ v \in H\ :\ \int_{(-1,1)} |v(x) - x|^2 d\mu \le 1 \right\}.$$

Rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

a) L'insieme C potrebbe essere vuoto? C è convesso? è un sottoinsieme chiuso di H?

b) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione costante $u(x) = a$, $x \in (-1, 1)$, appartiene a C?

c) Ricordare l'enunciato del teorema delle proiezioni (relativo ai convessi) in spazi di Hilbert e per $a = 1$ calcolare esplicitamente la proiezione di u su C.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 14 luglio 2022

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) = \frac{2n\sqrt[3]{x} + 3}{1 + (nx)^2}\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

per $n \in \mathbb{N}$.

a) Per $n \in \mathbb{N}$ fissato studiare misurabilità e integrabilità in $\mathbb{R}$ della funzione f_n.

b) Dimostrare esplicitamente che $|f_n(x)| \leq \dfrac{5}{n}$ per ogni x tale che $|x| \geq 1$.

c) La successione f_n converge q.o. in $\mathbb{R}$? converge anche quasi uniformemente e in misura?

d) Esaminare la convergenza in $L^1(\mathbb{R})$ per la successione f_n.

Esercizio 2. Siano X lo spazio $\mathbb{R}^3$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e Y lo spazio $\mathbb{R}^2$ munito della norma $\|\cdot\|_1$.

a) Richiamare la definizione delle due norme citate nei rispettivi spazi.

b) Dare un esempio di operatore lineare e continuo

$$T : X \to Y \quad \text{tale che} \quad T(1,1,1) = (0,1).$$

c) Una volta scritto l'operatore, trovare una costante $C > 0$ tale che $\|y\|_1 \leq C\|x\|_\infty$ per ogni $x \in X$, $y = T(x) \in Y$.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 30 agosto 2022

Esercizio 1. Si considerino le funzioni

$$f_n(x) := \frac{1}{2n}\, e^{-n|x|}, \quad n \in \mathbb{N}\ (n \geq 1), \quad \text{e la serie} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{per} \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della serie di funzioni (NB: della serie e non della successione $\{f_n\}$) in $\mathbb{R}$ rispetto alla misura μ di Lebesgue;

b) per $n \geq 1$ fissato discutere l'integrabilità secondo Lebesgue delle funzioni

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \text{in } \mathbb{R};$$

c) indicata con $s(x)$ la somma della serie per gli $x \in \mathbb{R}$ per cui è definita, studiare l'integrabilità secondo Lebesgue per questa funzione.

Esercizio 2. Sia H lo spazio di Hilbert $\mathbb{R}^2$ munito dell'usuale prodotto scalare componente per componente. Posto

$$X = \{(x, y) \in H :\ x \leq 0,\ \ x + y = 0\},$$

a) si chiede se X è un sottospazio di H.

b) Provare che X è chiuso in H.

c) Esiste la proiezione del vettore $(2, -1)$ su X? Nel caso calcolarla esplicitamente.

d) Individuare l'insieme ortogonale $X^{\perp} \subseteq H$ di X, giustificando per bene la risposta.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 27 settembre 2022

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{nx}, \quad x \in [-1,1], \;\; n \in \mathbb{N}.$$

a) Per $n \geq 1$ fissato discutere il segno, la misurabilità e l'integrabilità secondo Lebesgue delle funzioni f_n in $[-1,1]$.

b) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione $\{f_n\}$ in $[-1,1]$.

c) Esiste finito il

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n(x)dx\,?$$

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di Hilbert ℓ^2 delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Inoltre, per ogni intero $n \geq 1$ sia T_n l'operatore da ℓ^2 in sè che a $x = (x_k)$ associa $y = T_n x$ con

$$y_k = x_k \;\text{ per }\; k \leq n, \quad y_k = 0 \;\text{ per }\; k > n.$$

a) Provare che per $n \geq 1$ fissato T_n è lineare e continuo.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ calcolare $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2;\ell^2)}$.

c) Studiare iniettività e suriettività dell'operatore T_{10}.

d) Esiste un operatore $T \in \mathcal{L}(\ell^2;\ell^2)$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si abbia $(T_n x)_k \to (Tx)_k$ per $n \to \infty$, cioè la convergenza componente per componente?

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 14 dicembre 2022

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\ln n}{1+(nx)^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Per $n \geq 1$ fissato discutere la misurabilità e l'integrabilità secondo Lebesgue di f_n.

b) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$.

c) Esaminare anche la convergenza della successione $\{f_n\}$ in $L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$, dove $\mathcal{L}$ sta per la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e μ denota la misura di Lebesgue. Dare un esempio di misura relativa φ su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ che non sia né μ-assolutamente continua né μ-singolare, e tale che

$$\varphi([-1,2]) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi((0,+\infty)) = -1.$$

Inoltre, per tale misura relativa φ individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

Esercizio 3. Introdotto l'insieme

$$X = \left\{ f \in C^1([0,+\infty)) \;:\; f,\, f' \;\text{ sono limitate in }\; [0,+\infty) \;\text{ e }\; f(0) = 0 \right\},$$

controllare che X è uno spazio vettoriale e provare che le seguenti che

$$\|f\|_c = \sup_{x\geq 0} |f(x)| + \sup_{x \geq 0} |f'(x)|\,, \quad \|f\|_d = \sup_{x\geq 0} |f'(x)|$$

sono entrambe norme in X. Queste due norme sono tra loro equivalenti?

Esercizio 4. Nello spazio di Hilbert reale $H = L^2(-1,1)$ si consideri il sottoinsieme

$$K = \left\{ v \in H \;:\; \int_{(-1,1)} 3|v(x) - x|^2 d\mu \leq 2 \right\}$$

a) Dimostrare che K è non vuoto, convesso e chiuso in H.

b) Richiamare l'enunciato del Teorema delle Proiezioni e trovare esplicitamente la proiezione su K della funzione nulla $f(x) = 0$, $x \in (-1,1)$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 11 gennaio 2021

Esercizio 1. Si considerino le funzioni

$$f_n(x) := \min\left\{1, (nx)^{-(n+1)}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{e la serie} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{per} \;\; x \in (0, +\infty).$$

a) Per $n \in \mathbb{N}$ fissato, discutere l'integrabilità delle funzioni f_n in $(0, +\infty)$ rispetto alla misura μ di Lebesgue.

b) Si consideri ora la serie di funzioni (NB: la serie e non la successione $\{f_n\}$) e se ne discuta la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura;

c) indicata con $s(x)$ la somma della serie per gli $x \in (0, +\infty)$ per cui è definita, studiare l'integrabilità secondo Lebesgue per questa funzione.

Esercizio 2. Nello spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \int_{A \cap [0,+\infty)} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\, d\mu - 2\mu(A \cap [-1, 0]) + \pi\, \delta_1(A), \qquad A \in \mathcal{L},$$

dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, μ è la misura unidimensionale di Lebesgue e δ_1 indica la misura di Dirac concentrata in 1.

a) Provare che φ è una misura relativa su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

b) Per tale misura φ individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

c) φ è μ-assolutamente continua oppure μ-singolare?

d) Calcolare, ovvero scrivere esplicitamente, la derivata di Radon-Nikodym $\dfrac{d\varphi}{d\mu}$.

Esercizio 3. Sia $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione reale assegnata. Si consideri poi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, il funzionale $T_n : \ell^1 \to \mathbb{R}$ (ℓ^1 qui è spazio vettoriale reale) definito da

$$T_n x := \sum_{k=1}^{n} y_k x_k, \qquad x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1.$$

a) Per $n \in \mathbb{N}$ fissato, provare che T_n è lineare e continuo. Inoltre calcolarne la norma.

b) Si assuma ora che $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sia un elemento di c (successioni reali convergenti). La successione di funzionali $\{T_n\}$ risulta convergente nello spazio $(\ell^1)' = \mathcal{L}(\ell^1, \mathbb{R})$? In caso affermativo, identificare il funzionale limite T e calcolarne la norma in $(\ell^1)'$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio $L^2(-1, 1)$ delle (classi di) funzioni $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ misurabili e di quadrato sommabile in $(-1, 1)$. Sia inoltre $C \subset L^2(-1, 1)$ il sottoinsieme delle funzioni f tali che

$$|f(x)| \leq 1 \;\text{ per q.o. }\; x \in (-1, 0), \qquad \int_{(0,1)} |f(x)|^2 dx \leq 1.$$

a) Provare che C è un sottoinsieme non vuoto, convesso e chiuso in $L^2(-1, 1)$.

b) Data la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } \; -1 < x < 0 \\ e^x & \text{se } \; 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

si provi che $g \in L^2(-1, 1)$.

c) Determinare la proiezione di g su C, giustificando per bene la risposta.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 febbraio 2021

Esercizio 1. Per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0,1]$ si consideri la funzione $u_n(x) = (n+3)x(1-x)^n$. Inoltre, sia v una funzione integrabile secondo Lebesgue in $[0,1]$.

a) Discutere la misurabilità e l'integrabilità secondo Lebesgue in $[0,1]$ della funzione prodotto $f_n(x) = u_n(x)v(x)$, $x \in [0,1]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Discutere la convergenza **quasi ovunque** della successione $\{f_n\}$ e la convergenza **uniforme** della successione $\{u_n\}$ in $[0,1]$.

c) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)dx$, motivando per bene la risposta data.

Esercizio 2. Sia $AC([-1,1])$ l'insieme delle funzioni reali definite in $[-1,1]$ e assolutamente continue in questo intervallo.

a) Ricordare la definizione e le proprietà delle funzioni assolutamente continue, in particolare il legame con le funzioni a variazione limitata e con la formula fondamentale del calcolo (estesa all'integrale di Lebesgue).

b) Dimostrare che $AC([-1,1])$ è uno spazio vettoriale e che

$$\|f\| = |f(0)| + \int_{[-1,1]} |f'(t)|dt, \quad f \in AC([-1,1]), \text{ con } f' \text{ derivata q.o. di } f,$$

definisce una norma in $AC([-1,1])$.

c) Lo spazio $AC([-1,1])$ è completo rispetto alla norma qui definita? Motivare per bene la risposta.

Esercizio 3. Nello spazio ℓ^2 delle successioni complesse $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tali che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ converga, si consideri il funzionale $L(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$, $\quad x = (x_n) \in \ell^2$.

a) Provare che L è ben definito, lineare e limitato.

b) L'insieme $N = \{x \in \ell^2 : \ L(x) = 0\}$ è un sottospazio di ℓ^2? È chiuso in ℓ^2?

c) Sia e^k l'elemento di ℓ^2 con componente k-ima 1 e tutte le altre componenti nulle: provare che $e^k \notin N$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

d) Fissato ora e^1, individuare la proiezione di e^1 sul sottospazio chiuso $N^\perp$, giustificando per bene la risposta.

Esercizio 4. Posto $[\,t\,] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le t\}$ per $t \in \mathbb{R}$, sia $f(x)$ la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = 2[2x/\pi] + 1$ per $x \in [-\pi, \pi)$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

b) Discutere convergenza puntuale, uniforme e in $L^2(-\pi,\pi)$ della serie trovata.

c) In particolare, la serie di Fourier converge nei punti $x = -\pi/2$ e $x = \pi/6$? Se si, quanto valgono le somme in questi punti?

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 16 giugno 2021

Esercizio 1. Per $x \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, \ldots$ definiamo le funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{1/3} + \sqrt[5]{x^4}} & \text{se } 0 < |x| \le n\,, \\[2ex] 0 & \text{se } x = 0 \text{ e se } |x| > n\,. \end{cases}$$

Si consideri ora la successione di funzioni $\{f_n\}$ e, per $n \to \infty$, si studino le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e nei vari spazi $L^p(\mathbb{R})$, per $1 \le p \le \infty$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

a) Dare un esempio di misura relativa φ tale che

$$\varphi([-1, 2]) = -2, \qquad \varphi(\{0\}) = 2, \qquad \varphi((0, +\infty)) = 1;$$

b) per tale misura relativa individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

c) Richiamare la definizione di misura relativa ed enunciare il teorema di Hahn di decomposizione di una misura relativa.

Esercizio 3. Sia T l'operatore che a $f \in L^\infty(1, +\infty)$ associa la funzione $g = T(f)$, con $g(x) = f(x)e^{1-x}$ per ogni $x > 1$.

a) Provare che l'operatore T è ben definito da $L^\infty(1, +\infty)$ in $L^1(1, +\infty)$, cioè che $T(f) \in L^1(1, +\infty)$ per ogni $f \in L^\infty(1, +\infty)$.

b) Dimostrare che $T : L^\infty(1, +\infty) \to L^1(1, +\infty)$ è lineare e limitato. Calcolare la norma di T.

c) Se come spazio immagine si prende $L^p(1, +\infty)$ con $1 < p \le \infty$, si può concludere ancora qualcosa relativamente ai punti a) e b)?

Esercizio 4. Si consideri lo spazio di Hilbert ℓ^2 reale e si definisca

$$C = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2 : \quad (n+1)^{-2} \le x_n \le 1 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

a) L'insieme C potrebbe essere vuoto? C è convesso? è un sottoinsieme chiuso di ℓ^2?

b) Mostrare che l'elemento $y = (y_1, y_2, \ldots)$, con $y_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2n}$ per $n \in \mathbb{N}$, appartiene ad ℓ^2.

c) Ricordare il teorema delle proiezioni e calcolare esplicitamente la proiezione dell'elemento y su C.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 15 luglio 2021

Esercizio 1. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n \arctan\bigl(3n^2\bigr)} \quad \text{per} \quad x \in [-1,1].$$

a) Discutere la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della serie di funzioni;

b) indicata con $s(x)$ la somma della serie per gli $x \in [-1,1]$ per cui è definita, valutare la misurabilità e l'integrabilità secondo Lebesgue della funzione s in $[-1,1]$ o, eventualmente, in sotto-intervalli.

Esercizio 2. Sia $K \subset L^2(-\pi,\pi)$ l'insieme costituito da tutte le (classi di) funzioni $f \in L^2(-\pi,\pi)$ tali che f è una funzione pari (o, più precisamente, esiste un rappresentante della classe che è pari).

a) Provare che l'insieme K è non vuoto. K è convesso? è un sottoinsieme chiuso di $L^2(-\pi,\pi)$?

b) Dato $w \in L^2(-\pi,\pi)$, provare che la proiezione di w su K è data da

$$P_K(w)(x) = \frac{w(x)+w(-x)}{2}, \qquad x \in (-\pi,\pi).$$

c) Considerato il funzionale $J : L^2(-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ definito da

$$J(v) = \int_{(-\pi,\pi)} \Bigl((v(x) - \sin x)^2 + \cos x \Bigr) dx,$$

dire se J ammette minimi in K e, in caso affermativo, ricavarli esplicitamente.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 17 dicembre 2021

Esercizio 1. Per $n \in \mathbb{N}$ si considerino le funzioni

$$f_n(x) = \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$;

b) discutere l'integrabilità delle funzioni f_n in $\mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$ fissato, rispetto alla misura μ di Lebesgue su $\mathbb{R}$;

c) indicata con f la funzione limite delle f_n, si chiede se $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu$ esiste e vale $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$.

Esercizio 2. Per $1 \le p < \infty$ si consideri lo spazio di Banach ℓ^p delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ converga, munito della norma usuale. Notiamo che, fissata una successione $y = (y_k) \in \ell^2$, questa successione genera un operatore $L_y : \ell^2 \to \ell^1$ definito da $L_y(x) := (x_k\, y_k), \; x = (x_k) \in \ell^2$.

a) Verificare linearità e continuità di L_y.

b) Provare che $\|L_y\|_{\mathcal{L}(\ell^2;\ell^1)} \le \|y\|_{\ell^2}$ per ogni $y \in \ell^2$.

c) Se invece si fissa $y = (y_k)$ in ℓ^4, lo stesso operatore L_y è ancora ben definito da ℓ^2 in ℓ^1?

Esercizio 3. Nello spazio di Hilbert $H = L^2(0, 1)$ si consideri il sottoinsieme X delle funzioni costanti e la funzione $f(x) = |x|^{-1/3}, \quad x \in (0, 1)$.

a) Dire perché $f \in H$ e perché X è un sottospazio di H.

b) X è chiuso in H?

c) Individuare ed esplicitare il sottospazio chiuso $Y = X^{\perp}$.

d) Trovare la proiezione di f su X.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 13 gennaio 2020

Esercizio 1. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ lo spazio di misura unidimensionale di Lebesgue, dove $\mathcal{L}$ è la σ-algebra dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue e λ denota la misura di Lebesgue. Siano inoltre $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^2}$, $g(x) = \max\{0, x^3\}$, per $x \in \mathbb{R}$, e si considerino le funzioni di insieme

$$\mu(E) = \int_E f \, d\lambda \,, \quad \nu(E) = \int_E g \, d\lambda \quad \text{per ogni} \quad E \in \mathcal{L}.$$

Rispondere ora a ciascuna delle seguenti domande e giustificare le risposta.

a) μ e ν sono misure? b) sono misure relative? c) ν è σ-finita?

d) μ e ν sono assolutamente continue rispetto a λ?

e) se $E \in \mathcal{L}$ è tale che $\lambda(E) \neq 0$, possiamo concludere che $\mu(E) \neq 0$?

f) λ è ν-a.c.? g) μ è ν-a.c.? h) μ e ν sono λ-singolari?

Esercizio 2. Siano $d \in \mathbb{N}$ e λ un parametro reale fissato. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} e^{-n|x|^2} \,, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{S}$$

a) Ricordando che $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} dx = \pi^{d/2}$, controllare che per $\lambda \in \mathbb{R}$ fissato le ridotte della serie in (S) sono funzioni integrabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^d$.

b) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza quasi ovunque della serie in $\mathbb{R}^d$.

c) Con riferimento al punto precedente, studiare anche le convergenze quasi uniforme e in misura.

d) Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la somma della serie in (S) risulta una funzione integrabile in $\mathbb{R}^d$?

Esercizio 3. Si consideri l'insieme V delle funzioni $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue e tali che $\|u\|_a := \sup_{t \geq 0} |e^t u(t)| < +\infty$. Controllare che V è uno spazio vettoriale e che $\| \cdot \|_a$ definisce una norma in V. Lo spazio V coincide con l'insieme delle funzioni continue e limitate su $[0, +\infty)$?

Esercizio 4. Posto

$$C := \left\{ v \in L^2(0,1) : \int_{(0,1)} v(x) \, dx = 0 \right\}$$

a) e osservato che C è un sottoinsieme di $L^1(0,1)$ (perché?), dimostrare che C è un sottospazio di $L^2(0,1)$ ed è anche chiuso in $L^2(0,1)$.

b) Sia $f(x) = \ln(1/x)$ per $x \in (0,1)$, provare che $f \in L^2(0,1)$ e determinare la proiezione di f su C giustificando per bene la risposta.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 22 aprile 2020

Esercizio 1. Posto $\phi_n(x) := \dfrac{n^2 e^{x^2}+1}{n^2 e^{x^2}+2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dimostrare che

a) per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $u \in L^2(\mathbb{R})$ si ha $\phi_n u \in L^2(\mathbb{R})$;

b) per ogni $u \in L^2(\mathbb{R})$ si ha $\phi_n u \xrightarrow{n\to+\infty} u$ q.o. in $\mathbb{R}$ ed in $L^2(\mathbb{R})$;

c) se $u_n \xrightarrow{n\to\infty} u$ in $L^2(\mathbb{R})$ allora $\phi_n u_n \xrightarrow{n\to\infty} u$ in $L^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e sia $g : [0,1] \to [a,b]$ una funzione strettamente crescente.

a) Mostrare che la funzione composta $f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$ è a variazione limitata in $[0,1]$.

b) Provare che la variazione totale di $f \circ g$ in $[0,1]$ è minore uguale della variazione totale di f in $[a,b]$.

c) Se la funzione $g : [0,1] \to [a,b]$ è anche suriettiva, si può concludere qualcosa di più specifico rispetto al punto b)?

Esercizio 3. Ci occupiamo di spazi di Hilbert reali e del teorema delle proiezioni in questi spazi.

a) Richiamare l'enunciato del teorema delle proiezioni nella versione per sottoinsiemi convessi.

b) Dare un esempio di spazio di Hilbert H che sia reale e infinito-dimensionale, introducendo anche prodotto scalare e norma in H.

c) Nello spazio H considerato in b), fornire esplicitamente un esempio di convesso chiuso non vuoto $K \subset H$ che non sia un sottospazio e che contenga almeno due elementi distinti, con le relative spiegazioni per convessità e chiusura.

Esercizio 4. Posto $f(x) = |\sin x|$ per $x \in \mathbb{R}$,

a) studiare la periodicità e le eventuale simmetrie di questa funzione;

b) sviluppare f in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

c) discutere la convergenza puntuale, uniforme e in $L^2(-\pi,\pi)$ della serie trovata.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 16 giugno 2020

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ 0 < x < \frac{1}{n+1} \\ x^{-1/4} & \text{se } \ \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} & \text{se } \ 1 < x < n+1 \\ 0 & \text{se } \ x \geq n+1 \end{cases} \quad , \quad x \in (0, +\infty), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

per $n \to \infty$ studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e nei vari spazi $L^p(0, +\infty)$, per $1 \leq p \leq \infty$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di Hilbert ℓ^2 reale e si definisca

$$K = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2 : \ -1 \leq x_n \leq 2^{3-n} \ \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

a) L'insieme K potrebbe essere vuoto? K è convesso? è un sottoinsieme chiuso di ℓ^2?

b) Mostrare che l'elemento $w = (w_1, w_2, \ldots)$, con $w_n = (-1)^n/n$ per $n \in \mathbb{N}$, appartiene ad ℓ^2.

c) Ricordare il teorema delle proiezioni e calcolare esplicitamente la proiezione dell'elemento w su K.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 9 luglio 2020

Esercizio 1. Si consideri lo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue.

a) Dare un esempio di misura μ su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ tale che $\mu(-\infty, 0)) = +\infty$ e $\mu([1, +\infty)) = 2$;

b) richiamare le definizioni di misura e misura relativa e sottolineare le differenze tra i due concetti;

c) dare un esempio di misura relativa φ tale che

$$\varphi([-2,1]) = -3, \qquad \varphi(\{0\}) = 5, \qquad \varphi((0,+\infty)) = 3;$$

d) per tale misura relativa φ individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

e) Introdurre ed enunciare il teorema di Hahn di decomposizione di una misura relativa.

Esercizio 2. Sia H uno spazio di Hilbert reale e sia M un suo sottoinsieme non vuoto. Definiamo

$$M^\perp = \{x \in H \,:\, (x,y) = 0 \ \text{ per ogni } \ y \in M\}.$$

a) Provare che $M^\perp$ è un sottospazio chiuso di H;

b) se consideriamo ora l'insieme $(M^\perp)^\perp$, questo insieme ha qualche relazione con M?

c) Posto ora $H = \mathbb{R}^2$ con l'usuale prodotto scalare, determinare esplicitamente $M^\perp$ se M è il segmento chiuso di estremi $(1,1)$ e $(2,2)$.

d) Sempre per $H = \mathbb{R}^2$ con l'usuale prodotto scalare, determinare esplicitamente $M^\perp$ nel caso in cui $M = \{(-1,1),\ (1,1)\}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 10 settembre 2020

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{N},$$

a) discutere le convergenze quasi ovunque e quasi uniforme in $\mathbb{R}$;

b) per ogni $n \in \mathbb{N}$ calcolare le norme $\|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ e $\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$;

c) discutere, usando eventualmente le conclusioni di b), la convergenza di $\{f_n\}$ in $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$.

Esercizio 2. Posto $\phi(x) := x^2$ e $\psi(x) = x$ per $x \in [0,1]$, si consideri

$$C := \big\{ v \in L^2(0,1) : \ \phi(x) \le v(x) \le \psi(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in [0,1] \big\} .$$

a) Dimostrare che C è un convesso chiuso e non vuoto di $L^2(0,1)$.

b) Se $f(x) = 1 - x$ per $x \in [0,1]$, determinare la proiezione di f su C giustificando per bene la risposta.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 28 settembre 2020

Esercizio 1. Posto, per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+n^2(x-n)^2} & \text{se } \; n-1 < x < n+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

si risponda alle seguenti domande.

a) Perché le funzioni f_n sono (misurabili e) integrabili in $\mathbb{R}$?

b) Studiare la convergenza quasi ovunque della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

c) È possibile applicare alla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale? Se si, quali? Se no, perché?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme V delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e limitate su tutto $\mathbb{R}$.

a) Perché V è uno spazio vettoriale?

b) Controllare se $\|u\|_a := \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|$, $\|u\|_b := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}|u(t)|\,dt$, $u \in V$, definiscono due norme in V.

c) Provare che lo spazio V risulta completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_a$.

d) La successione $f_n(t) = \min\{n, |t|\}$, $t \in \mathbb{R}$, risulta di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_b$?

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 4 dicembre 2020

Esercizio 1. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ lo spazio di misura unidimensionale di Lebesgue, dove $\mathcal{L}$ è la σ-algebra dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue e λ denota la misura unidimensionale di Lebesgue.

a) Dare un esempio di misura μ su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ tale che $\mu(-\infty, 0)) = 3$ e $\mu([1, +\infty)) = +\infty$.

b) Richiamare le definizioni di misura e misura relativa e sottolineare le differenze tra i due concetti.

c) Dare un esempio di misura relativa φ tale che

$$\varphi([-2, 1]) = 2, \qquad \varphi(\{0\}) = -1, \qquad \varphi((0, +\infty)) = -3;$$

d) per tale misura relativa φ individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

e) Dare un esempio di misura relativa ψ che sia assolutamente continua rispetto a λ e tale che $\psi(\mathbb{R}) = -4$.

Esercizio 2. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}\, x^{-1/\pi} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n+1} \\ e^{-nx} & \text{se } x \geq \frac{1}{n+1} \end{cases}, \quad x \in (0, +\infty), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

a) per $n \to \infty$ studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura.

b) Studiare poi la convergenza o meno nei vari spazi $L^p(0, +\infty)$, per $1 \leq p \leq \infty$.

Esercizio 3. Sia f una funzione assegnata in $L^2(0, 2\pi)$.

a) Dato $\varepsilon > 0$, è possibile approssimare f con una funzione $g_\varepsilon \in C^0([0, 2\pi])$ tale che $\|f - g_\varepsilon\|_{L^2(0,2\pi)} \leq \varepsilon$?

b) Calcolare il valore del limite per $n \to \infty$ della successione $\displaystyle\int_{(0,2\pi)} f(x) \sin(nx)\, dx$.

c) Dopo aver risposto a b), studiare il comportamento della stessa successione nel caso in cui $f \in L^1(0, 2\pi)$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 gennaio 2019

Esercizio 1. Posto $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ per $x \in \mathbb{R}$, si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, dove $f_n(x) := \psi\big(n^2(x-n)\big)$ per $x \in \mathbb{R}$.

a) Dimostrare che ψ è integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$ e che $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = 1$ [**Suggerimento**: può essere utile studiare l'integrale doppio $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\,dy$].

b) Studiare la convergenza in $L^1(\mathbb{R})$ della **serie** di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (NB: non confondere con la **successione** $\{f_n\}$).

c) discutere la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Indicata con λ la misura di Lebesgue unidimensionale in $\mathbb{R}$ e con $\mathcal{L}$ la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$, si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = 2\,\lambda(A \cap [0,2]) - 3 \int_{A \cap (-\infty,0)} e^x \, d\lambda + \int_A \frac{\sin x}{1+x^2}\, d\lambda, \quad A \in \mathcal{L}.$$

Provare che φ è una misura relativa su $\mathbb{R}$; dire se φ è λ-a.c. oppure λ-singolare oppure né λ-a.c. né λ-singolare; scrivere la derivata di Radon–Nikodym di φ.

Esercizio 3. Sia X lo spazio di tutte le classi di funzioni $u : (-1,1) \to \mathbb{R}$ misurabili e uguali tra loro q.o. tali che

$$N(u) = \int_{(-1,1)} \sqrt{|u(x)|}\, dx < +\infty.$$

a) Provare che X è uno spazio vettoriale e che $N(\,\cdot\,)$ non definisce una norma in X.

b) Posto $d(u,v) = N(u-v)$ per $v, v \in X$, dimostrare che d è una distanza in X.

c) Provare che $L^p(-1,1) \subset X$ per ogni $p \in [1,\infty]$.

d) Provare che se $u_n \to u$ in $L^1(-1,1)$, allora $d(u_n,u) \to 0$ per $n \to \infty$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $2\pi-$periodica definita da $f(x) = 0$ per $-\pi \le x \le 0$, e da $f(x) = 1$ per $0 < x < \pi$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier.

b) Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare $S(\pi/2)$.

c) Calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 22 febbraio 2019

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}, \quad x \in (-1,1), \ \ n \in \mathbb{N},$$

a) discutere le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di $\{f_n\}$ in $(-1,1)$.

b) Per quali $p \in [1,\infty]$ le funzioni f_n appartengono a $L^p(-1,1)$?

c) Per i p di cui al punto **b)**, si discuta la convergenza di $\{f_n\}$ in $L^p(-1,1)$.

Esercizio 2. Sia $f : [0, 2/\pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(1/x) & \text{se } \ 0 < x \le 2/\pi, \\ 0 & \text{se } \quad x = 0. \end{cases}$$

a) La funzione f è continua in $[0, 2/\pi]$? è monotona?

b) Segnalare i punti dell'intervallo $[0, 2/\pi]$ in cui f è derivabile e calcolare la derivata q.o. f' di tale funzione.

c) La funzione f è a variazione limitata in $[0, 2/\pi]$? è assolutamente continua?

Esercizio 3. Siano c_0 lo spazio delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \ldots)$ infinitesime, munito della norma

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

ed ℓ^2 lo spazio delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \quad \text{converga.}$$

a) Il sottoinsieme di c_0 *costituito dalle successioni che hanno tutte le componenti di indice pari nulle* è un sottospazio di c_0? È chiuso in c_0?

b) Dimostrare che ℓ^2 è un sottospazio di c_0.

c) ℓ^2 è un sottospazio chiuso di c_0? Oppure ℓ^2 è denso in c_0? oppure non è né chiuso né denso?

Esercizio 4. Sia H uno spazio di Hilbert reale e si consideri il seguente operatore

$$A : H \to H, \quad A(x) = x \quad \text{se } \ \|x\| \le 1, \quad A(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{se } \ \|x\| > 1.$$

a) Provare che A è un operatore di proiezione su un convesso, chiuso, non vuoto K di H e determinare K.

b) Mostrare che l'operatore A è lipschitziano da H in H.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 24 aprile 2019

Esercizio 1. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile, $\{u_n\}$ una successione di funzioni misurabili tale che $u_n \geq 0$ q.o. in Ω, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, sappiamo che

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ per q.o. } x \in \Omega, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} u_n(x)dx = 3.$$

Utilizzando queste informazioni,

a) dimostrare che $f \in L^1(\Omega)$ e che $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 3$;

b) posto $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ per $x \in \Omega$, discutere le convergenze $f_n \to f$ in $L^1(\Omega)$, in misura e quasi uniforme.

Esercizio 2. Motivando per bene le risposte, dire se ciascuna delle seguenti $N_i(f)$, $i = 1, \dots 4$, è una norma in $C^1([-1,1])$ e, in caso affermativo, valutare se $C^1([-1,1])$ risulta uno spazio di Banach rispetto a tale norma:

a) $N_1(f) = \max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |f'(x)|$;

b) $N_2(f) = |f'(0)| + \max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$;

c) $N_3(f) = \max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |f'(x)| + \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|dx$;

d) $N_4(f) = \max\limits_{-1 \leq x \leq 1} \Big(|f(x)|^2 + |\tanh(f'(x))| \Big)$.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 11 luglio 2019

Esercizio 1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto e limitato. Poniamo, per $s \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$,

$$f_\lambda(s) = \begin{cases} |s|^{\lambda-1}s & \text{se } s \neq 0, \\ 0 & \text{se } s = 0. \end{cases}$$

Fissata ora $u \in L^1(\Omega)$,

a) determinare per quali $\lambda > 0$ la funzione $x \mapsto f_\lambda(u(x))$ è integrabile in Ω.

b) È ragionevole chiedersi quanto fa $\lim_{\lambda \to 0^+} \int_\Omega f_\lambda(u(x))dx$? e $\lim_{\lambda \to 1^-} \int_\Omega f_\lambda(u(x))dx$? Discutere i due limiti.

Esercizio 2. Indicato con ℓ^2 lo spazio di Hilbert delle successioni reali $x = (x_n)$ tali che la serie $\|x\|_2^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ converga, sia X il sottoinsieme di ℓ^2 tale che i suoi elementi $x = (x_n)$ verificano

$$x_k = 0 \quad \text{per ogni } k \text{ dispari.}$$

a) L'insieme X è un sottospazio di ℓ^2? è chiuso in ℓ^2?

b) La successione $\left(\frac{1}{n}\right)$ sta in ℓ^2? appartiene a X?

c) Si chiede ora: esiste ed è unica la proiezione di $\left(\frac{1}{n}\right)$ su X? se la risposta è sì, determinare esplicitamente tale proiezione.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 22 novembre 2019

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

per $n \to \infty$ studiare le convergenze quasi ovunque, nei vari spazi $L^p(\mathbb{R})$, per $1 \le p \le \infty$, e anche quasi uniforme e in misura.

Esercizio 2. Nello spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \int_A e^{-|x|} \cos x d\mu, \quad A \in \mathcal{L},$$

dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e μ è la misura unidimensionale di Lebesgue.

a) Provare che φ è una misura relativa su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

b) Per tale misura relativa φ individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

c) Calcolare $\varphi([0, +\infty))$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio di Hilbert ℓ^2 delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Inoltre, per ogni intero $n \ge 1$ sia T_n l'operatore da ℓ^2 in sè che a $x = (x_k)$ associa $y = T_n x$ con

$$y_k = 2x_k \text{ per } k \le n, \quad y_k = x_{k-1} \text{ per } k > n.$$

a) Provare che per n fissato T_n è lineare e continuo.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ calcolare $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2;\ell^2)}$.

c) Studiare iniettività e suriettività dell'operatore T_5.

d) La successione di operatori $\{T_n\}$ risulta convergente nello spazio $\mathcal{L}(\ell^2; \ell^2)$?

Esercizio 4. Sia $f(x)$ la funzione $2\pi-$periodica tale che $f(x) = \cos x$ per $0 \le x < \pi$, $f(x) = -\cos x$ per $-\pi \le x < 0$.

a) Sviluppare f in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

b) discutere la convergenza puntuale, uniforme e in $L^2(-\pi, \pi)$ della serie trovata.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 17 gennaio 2018

Esercizio 1. Se $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile e non negativa, consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = (u(x))^n$, $x \in \mathbb{R}$ e ci interessiamo al limite $L = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)d\mu$, dove μ denota la misura unidimensionale di Lebesgue. Sapendo che $\int_{\mathbb{R}} u(x)d\mu = 2$, trovare un esempio di funzione u misurabile e non negativa oppure dimostrare che non è possibile trovarla per ciascuno dei seguenti casi

a) $L = 0$; **b)** $L = 2$; **c)** $L = -1$; **d)** $L = 1$; **e)** $L = 3$; **f)** $L = +\infty$.

[Suggerimento: per u fissata può essere utile considerare gli insiemi $\{x \in \mathbb{R} : u(x) < 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} : u(x) = 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 1\}$]

Esercizio 2. Sia $f : [0, 2/\pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se } 0 < x \le 2/\pi, \\ 0 & \text{se } \quad x = 0. \end{cases}$$

a) Calcolare la derivata q.o. f' di tale funzione;

b) valutare l'integrabilità secondo Lebesgue di f' in $[0, 2/\pi]$;

c) discutere la validità della formula $f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f' d\mu$ per $0 \le a < b \le 2/\pi$;

d) la funzione f è a variazione limitata? nel caso fornire una stima della sua variazione totale.

Esercizio 3. Si considerino lo spazio ℓ^1 delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ converga, e lo spazio ℓ^∞ delle successioni reali limitate, muniti delle norme usuali. Sia T l'operatore definito per gli $x = (x_k) \in \ell^\infty$ da

$$y = Tx \quad \text{se} \quad y_k = 2^{-k} x_k \ \text{ per } \ k \ge 1.$$

a) Provare che $Tx \in \ell^1$ per ogni $x \in \ell^\infty$ e che l'operatore $T : \ell^\infty \to \ell^1$ è lineare e limitato.

b) Calcolare esplicitamente la norma dell'operatore $T : \ell^\infty \to \ell^1$.

c) Studiare iniettività e suriettività di $T : \ell^\infty \to \ell^1$.

Esercizio 4. Nello spazio di Hilbert reale $H = L^2(-1, 1)$ si consideri il sottoinsieme $K = \left\{ v \in H \ : \ \int_{(0,1)} |v(x)|^2 d\mu \le 1 \right\}$

a) Dimostrare che K è non vuoto, convesso e chiuso in H.

b) Ricordare il teorema delle proiezioni e trovare esplicitamente la proiezione della funzione $f(x) = 2x$, $x \in (-1, 1)$, su K.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 21 febbraio 2018

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right), \quad x \in [0, e], \;\; n \in \mathbb{N},$$

a) studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di $\{f_n\}$ in $[0, e]$;

b) discutere l'integrabilità delle funzioni f_n in $[0, e]$, per $n \in \mathbb{N}$ fissato, rispetto alla misura μ di Lebesgue su $\mathbb{R}$;

c) indicata con f la funzione limite delle f_n, si chiede se $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,e]} f_n d\mu$ esiste e vale $\int_{[0,e]} f d\mu$.

d) (*facoltativo*) Studiare le convergenze $f_n \to f$ in $L^p([0, e])$ per $1 \leq p \leq \infty$.

Esercizio 2. Siano $\mathcal{B}$ la famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$, μ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, $\{x_n\}$ e $\{a_n\}$ due successioni di numeri reali con $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Per $E \in \mathcal{B}$ definiamo

$$\nu(E) = \sum_{x_n \in E} a_n \; .$$

Provare che ν è una misura relativa su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ e calcolare $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Esercizio 3. Sia $\Omega = [-1, 1]^2$, cioè Ω denota il quadrato di centro l'origine e lato 2 in $\mathbb{R}^2$. Consideriamo lo spazio di Hilbert reale $H = L^2(\Omega)$ e il suo sottoinsieme

$$X = \{f \in L^2(\Omega) : \;\; |f(x, y)| \geq 1 \;\text{ per q.o. } (x, y) \in \Omega\}.$$

a) X è non vuoto? **b)** X è un convesso di H? **c)** X è chiuso in H?

d) Sia ora $u : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $u(x, y) = xy$ se $y \geq 0$, $u(x, y) = 0$ se $y < 0$. È possibile definire la proiezione di u su X in $L^2(\Omega)$?

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $2\pi-$periodica tale che $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$ per $0 \leq x < 2\pi$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier.

b) Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare $S(0)$.

c) Calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}$.

d) Discutere la convergenza uniforme della serie di Fourier in $\mathbb{R}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 10 luglio 2018

Esercizio 1. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,, \quad \text{con } f_n(x) := \frac{x}{\sqrt{n}\big(1+nx^2\big)} \quad \text{per } x \in \mathbb{R},$$

a) discuterne la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della **serie** di funzioni in $\mathbb{R}$ (NB: non confondere con la **successione** $\{f_n\}$);

b) discutere l'integrabilità delle funzioni f_n rispetto alla misura μ di Lebesgue su $\mathbb{R}$;

c) indicata con s la somma della serie laddove è definita, studiare l'integrabilità secondo Lebesgue anche per questa funzione.

Esercizio 2. Posto $E = \{f \in C^0([0,+\infty)) : \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$, si definisca

$$\|f\|_E = \sup_{x\in[0,+\infty)} |f(x)|.$$

a) Si provi che E è uno spazio vettoriale e che $\|\cdot\|_E$ è effettivamente una norma.

b) Rispetto alla norma $\|\cdot\|_E$, E è uno spazio di Banach?

c) Si consideri l'operatore lineare $L : E \to L^1([0,+\infty))$ definito da $(Lf)(x) = e^{-x}f(x)$, $x \geq 0$. Si provi che L è ben definito, lineare e continuo.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^2$, dati i due vettori $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ poniamo

$$(\!(x, y)\!) = 4x_1y_1 + x_2y_2.$$

a) Verificare che $x, y \mapsto (\!(x, y)\!)$ definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$, rispetto al quale $H = \mathbb{R}^2$ è uno spazio di Hilbert.

b) Se V è il sottospazio $V = \{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, caratterizzare il sottospazio ortogonale $V^\perp$ in H.

d) Determinare la proiezione su V del vettore $(-1, 1)$.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 30 agosto 2018

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \max\left\{0\,,\ \frac{n-|x-n|}{n^2}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

per $n \to \infty$ studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in tutti gli spazi $L^p(\mathbb{R})$, per $1 \le p \le \infty$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^2$, dati i due vettori $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ poniamo

$$((x, y)) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

a) Verificare che $x, y \mapsto ((x, y))$ definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$, rispetto al quale $H = \mathbb{R}^2$ è uno spazio di Hilbert.

b) Se V è il sottospazio $V = \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, caratterizzare il sottospazio ortogonale $V^\perp$ in H.

c) Determinare la proiezione su V del vettore $(1, 1)$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 27 novembre 2018

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{n}{2}\, e^{-n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ per } n \in \mathbb{N}.$$

a) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$;

b) discutere l'integrabilità delle funzioni f_n in $\mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$ fissato, rispetto alla misura μ di Lebesgue su $\mathbb{R}$;

c) indicata con f la funzione limite delle f_n, si chiede se

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \quad \text{esiste e vale} \quad \int_{\mathbb{R}} f d\mu\,.$$

Esercizio 2. Dare un esempio di misura relativa φ sullo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, tale che

$$\varphi((-\infty, 0)) = 3, \quad \varphi([-1, 1]) = -2, \quad \varphi((0, +\infty)) = 5.$$

Inoltre, per tale misura relativa individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

Esercizio 3. Si considerino lo spazio ℓ^1 delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ converga e lo spazio c_0 delle successioni reali infinitesime, muniti delle norma $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$, rispettivamente.

a) Si provi che ℓ^1 è un sottospazio di c_0.

b) Calcolare esplicitamente la norma dell'operatore di inclusione da ℓ^1 in c_0.

c) ℓ^1 è un sottospazio chiuso di c_0? Oppure ℓ^1 è denso in c_0? oppure non è né chiuso né denso?

Esercizio 4. Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio $H = L^2(0, e)$:

$$X = \{u \in H : \ u(x) \geq 0 \ \text{ per q.o. } \ x \in (0, e)\}$$

e la funzione $f(x) = \ln x$, $x \in (0, e)$.

a) Dire perché $f \in H$ e perché X è un convesso non vuoto di H.

b) X è chiuso in H?

c) Trovare la proiezione di f su X.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 17 gennaio 2017

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}\,, \quad x \in (0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N},$$

a) studiare la convergenza q.o., q.u. e in misura di $\{f_n\}$ in $(0, +\infty)$.

b) Provare che per qualunque $n \in \mathbb{N}$ la funzione f_n è integrabile in $(0, +\infty)$.

c) Esiste finito il $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{(0,+\infty)} f_n(x)dx$?

Esercizio 2. Nello spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, 2^{-k}\, \delta_{k-3}(A), \quad A \in \mathcal{L},$$

dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e, per $y \in \mathbb{R}$, δ_y indica la misura di Dirac concentrata in y.

a) φ è una misura relativa su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$?

b) Per tale misura φ individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

c) Calcolare $\varphi(B)$, dove $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| > 1\}$.

d) φ è assolutamente continua oppure singolare rispetto alla misura μ di Lebesgue?

Esercizio 3. Si consideri l'insieme

$$V = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ misurabile } : \ \int_{\mathbb{R}} e^{|x|} |f(x)|^3 dx < +\infty \right\}.$$

a) V ha la struttura di spazio vettoriale?

b) Provare che V è un sottoinsieme di $L^3(\mathbb{R})$.

c) Provare che $C_c^0(\mathbb{R})$ (spazio delle funzioni continue con supporto compatto in $\mathbb{R}$) è un sottoinsieme di V.

d) V è chiuso in $L^3(\mathbb{R})$?

Esercizio 4. Sia $L^2(-1,1)$ l'usuale spazio di Hilbert *complesso* con prodotto scalare $(u, v) = \int_{(-1,1)} u(x)\,\overline{v(x)}\,dx$ per $u, v \in L^2(-1,1)$. Trovare una funzione $g \in L^2(-1,1)$ tale che

$$(f, g) = \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{i}{1 + (y-x)^2}\, f\left(\tfrac{x}{2}\right) (y - x) dx\, dy, \qquad \text{per ogni } f \in L^2(-1,1).$$

La $g \in L^2(-1,1)$ così trovata è unica?

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 16 febbraio 2017

Esercizio 1. Posto, per $x \in [1, +\infty)$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \ln(1+nx) - \ln(nx) & \text{se } 1 \le x \le n, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

a) dimostrare che $|f_n(x)| \le 1/x$ per ogni $x > 1$ e per ogni $n \ge 1$.

b) Studiare la convergenza q.o. della successione $\{f_n\}$ in $[1, +\infty)$.

c) È possibile applicare alla successione $\{f_n\}$ i teoremi di Beppo Levi della convergenza monotona o di Lebesgue della convergenza dominata per passare al limite sotto il segno di integrale?

d) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \int_{[1,+\infty)} f_n(x)\, dx$.

Esercizio 2. Si chiedono due esempi di funzione a variazione limitata $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ tali che:

a) il primo sia quello di una funzione non monotona in $[0, 2]$ la cui variazione totale in $[0, 2]$ è 10;

b) il secondo fornisca una funzione assolutamente continua e non negativa che possiede una derivata q.o. $f' \notin L^\infty([0, 2])$.

Esercizio 3. Introdotto l'insieme $V = \{f \in C^1([-1, 1]) \ : \ f(0) = 0\}$,

a) controllare che V è uno spazio vettoriale.

b) Dimostrare che $\|f\|_0 = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$, $\|f\|_d = \max_{x\in[-1,1]} |f'(x)|$ sono entrambe norme in V.

c) Discutere l'equivalenza o meno delle due norme in V.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $2\pi-$periodica tale che $f(x) = \pi - x$ per $-\pi \le x < \pi$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ rispetto al prodotto scalare $(f, g) := \pi^{-1} \displaystyle\int_{(-\pi,\pi)} f(x)g(x)dx$, $f, g \in L^2(\mathbb{T})$.

b) Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare $S(-\pi)$.

c) Calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 14 giugno 2017

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in tutti gli spazi $L^p(\mathbb{R})$, per $1 \le p \le \infty$.

Esercizio 2. Per $1 \le p < \infty$ si consideri lo spazio di Banach ℓ^p delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ converga, munito della norma usuale (da richiamare). Inoltre, sia T l'operatore definito per gli $x \in \ell^2$ da

$$y = Tx \quad \text{se} \quad y_k = \frac{x_k}{k} \quad \text{per} \quad k \ge 1.$$

a) Provare che l'operatore T è lineare.

b) Determinare tutti e soli i valori di $p \in [1, \infty)$ tali che T risulti lineare e continuo da ℓ^2 in ℓ^p.

c) Per $p = 1$ calcolare esplicitamente la norma dell'operatore T da ℓ^2 in ℓ^1.

d) Studiare iniettività e suriettività di $T : \ell^2 \to \ell^p$ per tutti i p di cui al punto b).

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 3 luglio 2017

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt[4]{x+1}\,(1+x)^n}\,, \qquad x \in (0,+\infty),$$

a) studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura.

b) Per $n \in \mathbb{N}$ fissato trovare tutti i valori p, con $1 \le p \le \infty$, tali che $f_n \in L^p(0,+\infty)$.

c) Per i valori p di cui al punto b) studiare la convergenza della successione $\{f_n\}$ in $L^p(0,+\infty)$.

Esercizio 2. Per $1 \le q < \infty$ si consideri lo spazio di Banach ℓ^q delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q$ converga, munito della norma usuale (da richiamare). Inoltre, sia T l'operatore definito per gli $x \in \ell^2$ da

$$y = Tx \quad \text{se} \quad y_k = \frac{x_k}{k} \ \text{ per } \ k \ge 1.$$

a) Provare che l'operatore T è lineare.

b) Dimostrare che T è continuo da ℓ^2 in ℓ^1.

c) Calcolare esplicitamente la norma dell'operatore T.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 31 luglio 2017

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{3x^{2n}}{\left(1+2x^2\right)^{n+1}}, \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in tutti gli spazi $L^p(\mathbb{R})$, per $1 \leq p \leq \infty$.

Esercizio 2. Dare un esempio di operatore lineare e continuo

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \quad \text{tale che} \quad T(3,-2) = (-1,3,5,-2).$$

Una volta fornito l'esempio e dunque scritto l'operatore T, determinare una costante $C > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{4} |y_i| \leq C \max\{|x_1|, |x_2|\} \quad \text{per ogni } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$
$$\text{dove } (y_1, y_2, y_3, y_4) = T(x_1, x_2).$$

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 24 novembre 2017

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |y| \le \min \left\{ 1, \frac{2}{1+x^2} \right\} \right\}.$$

Sia inoltre $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili che converge q.o. in E ad una funzione u .

a) Provare che E è misurabile secondo Lebesgue e calcolarne la misura.

b) Si chiede se $\tanh u_n \to \tanh u$ q.o. in E.

c) Dire, motivando la risposta, se $\tanh u_n \to \tanh u$ in $L^1(E)$.

d) Dire, motivando la risposta, se $\tanh u_n \to \tanh u$ in $L^\infty(E)$.

Esercizio 2. Sia ℓ^2 lo spazio di Hilbert reale delle successioni $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Per λ fissato in $\mathbb{R}$, si consideri l'applicazione $T_\lambda : \ell^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$T_\lambda(x) = \sum_{n=5}^{\infty} \lambda^n x_n \, .$$

a) Valutare, in dipendenza del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, se T_λ è ben definito e rappresenta un elemento di $(\ell^2)'$, giustificando per bene le risposte date.

b) Per i valori λ per i quali $T_\lambda \in (\ell^2)'$, calcolare $\|T_\lambda\|_{(\ell^2)'}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 18 gennaio 2016

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$. Consideriamo le successioni di funzioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ definite da $u_n(x) = f(x/n)$ e $v_n(x) = f(nx)$ per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

a) Le successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ convergono q.o. in $\mathbb{R}$?

b) Esistono i seguenti limiti $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx$, $\quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} v_n(x)dx$ e nel caso quanto valgono?

Giustificare per bene le risposte date.

Esercizio 2. Dare un esempio di funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

- che sia a variazione limitata;
- che non sia né continua né monotona in $[-1, 1]$;
- la cui variazione totale nell'intervallo $[-1, 1]$ valga 5.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $E = \{u \in C^0([-1, 1]) : \ u(0) = 0\}$ munito della norma

$$\|u\|_\infty = \max_{-1\le t\le 1} |u(t)|, \qquad u \in E.$$

a) Dire perché lo spazio E è uno spazio di Banach.

b) Verificare che

$$\|u\|_a := \max_{-1\le t\le 1} \frac{|u(t)|}{1+t^2}, \quad \|u\|_b := \max_{-1\le t\le 1} t^2|u(t)|, \quad u \in E,$$

definiscono altre due norme in E.

c) Provare che $\|\cdot\|_a$ è equivalente a $\|\cdot\|_\infty$ e che invece $\|\cdot\|_b$ non è equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.

Esercizio 4. Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio $H = L^2(-1, 1)$ (munito di prodotto scalare e norma usuali)

$$X = \big\{u \in H : \ u(x) = ax + bx^2, \ x \in (-1, 1), \text{ per una coppia } (a, b) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 < x \le 0 \\ \frac{11}{12}\, x^{-1/4} & \text{se} \quad 0 < x < 1 \end{cases}.$$

a) Dire perché $f \in H$ e perché X è un sottospazio di H.

b) X è chiuso in H?

c) A partire dalle funzioni $w(x) = x$, $z(x) = x^2$, $x \in (-1, 1)$, costruire un sistema ortonormale che fornisca una base in X.

d) Trovare la proiezione di f su X.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 16 febbraio 2016

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $\mathbb{R}$ rispetto alla misura unidimensionale μ di Lebesgue. Posto $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \ n-1 \leq |f(x)| < n\}$ per $n \in \mathbb{N}$,

a) controllare la misurabilità degli insiemi A_n e provare che $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$;

b) discutere la convergenza o meno delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu$;

c) trovare un esempio di funzione f integrabile su $\mathbb{R}$ tale che la relativa successione $\{\mu(A_n)\}$ non sia monotona.

Esercizio 2. Siano $f_n : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f_n(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ \dfrac{1}{\sqrt[2n+1]{y-x}} & \text{se } x \neq y \end{cases}, \quad 0 \leq x,\, y \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione $\{f_n\}$.

b) Posto $Q = [0,1] \times [0,1]$ e osservato che le funzioni f_n sono integrabili secondo Lebesgue (non si richiede dimostrazione), calcolare i due limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \int_Q f_n(x,y)dxdy, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_Q |f_n(x,y)|dxdy,$$

Esercizio 3. Sia ℓ^1 lo spazio di Banach delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tali che

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty.$$

Dare un esempio di due sottospazi $X,\, Y \subset \ell^1$, diversi da ℓ^1 e dal sottospazio costituito dal solo vettore nullo, tali che X sia un chiuso di ℓ^1 mentre Y sia denso in ℓ^1, controllando esplicitamente chiusura per X e densità per Y.

Esercizio 4. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $2\pi-$periodica definita da $u(x) = x|x|$ per $x \in (-\pi, \pi]$.

a) Sviluppare u in serie di Fourier della forma $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$;

b) discutere la convergenza in $L^2(\mathbb{T})$ della serie trovata.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 13 giugno 2016

Esercizio 1. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}\,, \qquad x \geq 0,$$

a) dire se la serie converge quasi ovunque in $[0, +\infty)$;

b) studiare la convergenza quasi uniforme e in misura della serie in $[0, +\infty)$;

c) detta $f(x)$ la somma della serie, valutare la misurabilità e l'integrabilità della funzione f in $[0, +\infty)$;

d) è possible scambiare l'operazione di serie con quella di $\int_{[0,+\infty)}$?

Esercizio 2. Si consideri lo spazio di funzioni

$$V = \left\{ u \in C^0([-1,1]) \ : \ \int_{[-1,1]} u(x)\,dx = 0 \right\}$$

e si definisca

$$\|u\| = \int_{[-1,1]} u^+(x)dx, \qquad u \in V, \tag{$\diamond$}$$

dove $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$, $x \in [-1,1]$, denota la parte positiva di u.

a) Dire perché V è uno spazio vettoriale.

b) Verificare che $\|\cdot\|$ è effettivamente una norma in V.

c) Dare un esempio di funzione $u \in V$ tale che $\|u\| = 5$.

d) Discutere l'equivalenza della norma definita in $(\diamond)$ con la norma

$$\|u\|_1 = \int_{[-1,1]} |u(x)|\,dx, \qquad u \in V.$$

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 30 agosto 2016

Esercizio 1. Si consideri lo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la famiglia degli insiemi misurabili secondo la misura unidimensionale di Lebesgue λ. Consideriamo le funzioni di insieme

$$\mu(A) = \lambda(\{x \in A : \ 0 < x \leq 1\}), \quad \nu(A) = \lambda(\{x \in A : \ |x| \geq 1\}) \quad \text{per } A \in \mathcal{L}.$$

a) Provare che μ, ν sono misure su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$. Sono σ-finite?

b) Valutare se μ, ν sono assolutamente continue o singolari (oppure né assolutamente continue né singolari) rispetto alla misura λ.

c) λ è assolutamente continua o singolare rispetto a μ?

d) μ è assolutamente continua o singolare rispetto a ν?

Esercizio 2. Dare un esempio di operatore lineare e continuo

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5 \quad \text{tale che} \quad T(3, -2) = (1, 2, -6, 0, -3).$$

Una volta fornito l'esempio e dunque scritto l'operatore T, determinare una costante $C > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{5} |y_i| \leq C \max\{|x_1|, |x_2|\} \quad \text{per ogni } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = T(x_1, x_2).$$

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 27 settembre 2016

Esercizio 1. Posto, per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } \; n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

si risponda alle seguenti domande.

a) Perché le funzioni f_n sono (misurabili e) integrabili in $\mathbb{R}$?

b) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme, in misura della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

c) È possibile applicare alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale? Se si, quali? Se no, perché?

Esercizio 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x + y + z \geq 0\}.$$

a) L'insieme X è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$?

b) Provare che X è chiuso in $\mathbb{R}^3$.

c) Esiste la proiezione del vettore $(-1, 1, -1)$ su X? Nel caso calcolare esplicitamente tale proiezione.

d) Individuare l'insieme ortogonale $X^{\perp}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 febbraio 2015

Esercizio 1. Per $n \in \mathbb{N}$ si considerino le funzioni

$$f_n(x) = \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^{n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Trovare un intero $k \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq k$ la funzione f_n sia integrabile in $\mathbb{R}$.

b) Calcolare, motivando opportunamente le risposte, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx.$$

Esercizio 2. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione così definita: $f(0) = 0$; per $n = 1, 2, \ldots$ la restrizione di f all'intervallo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ ha come grafico il segmento di estremi

$$\left(\frac{1}{n+1}, \frac{(-1)^n}{n+1}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right).$$

a) Tale funzione f è a variazione limitata in $[0, 1]$?

b) Se $\{z_n\}$ è una successione di funzioni continue e a variazione limitata in $[0, 1]$ che converge uniformemente a una funzione z in $[0, 1]$, è possibile concludere che z è a variazione limitata in $[0, 1]$?

Esercizio 3. Si considerino l'intervallo $(0, 1)$ della retta reale (munito dell'ordinaria misura di Lebesgue) e gli spazi $L^p(0, 1)$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Dire, motivando per bene le risposte, se esistono (oppure non possono esistere) delle successioni $\{g_n\}$, $\{h_n\}$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ tali che g_n, h_n, u_n, $v_n \in L^\infty(0, 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e inoltre, per $n \to \infty$,

a) $g_n \to 0$ in $L^1(0, 1)$ ma $\|g_n\|_{L^\infty(0,1)} \to +\infty$;

b) $h_n \to 0$ in $L^\infty(0, 1)$ ma $\|h_n\|_{L^1(0,1)} \to +\infty$;

c) $u_n \to 0$ in $L^1(0, 1)$ ma $\|u_n\|_{L^2(0,1)} \to +\infty$;

d) $v_n \to 0$ in $L^2(0, 1)$ ma $\|v_n\|_{L^1(0,1)} \to +\infty$.

Esercizio 4. Si consideri l'insieme

$$X = \left\{f \in L^2(0, +\infty) \ : \ f(x) = 1/x \ \text{ per q.o. } \ x \in (2, +\infty)\right\}.$$

a) Provare che X è un convesso contenuto in $L^2(0, +\infty)$.

b) Dire se X è un sottospazio di $L^2(0, +\infty)$.

c) Dire se X è chiuso in $L^2(0, +\infty)$.

d) Posto $g(x) = e^{-x}$ per $x > 0$, calcolare la proiezione di g su $\overline{X}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 15 giugno 2015

Esercizio 1. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^3$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue e tali che $-2 \leq f_n(x) \leq 1$ q.o. in Ω, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, la successione $\{f_n\}$ converge a una funzione f in misura.

a) Dimostrare che, per ogni $1 \leq p < \infty$, si ha $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$.

b) Se Ω è ora la palla aperta di centro l'origine e raggio 1, costruire un esempio di successione $\{f_n\}$ nelle condizioni dell'enunciato e tale che $f_n \not\to f$ in $L^\infty(\Omega)$.

Esercizio 2. Nello spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \int_A \frac{\sin x}{1+x^2} d\mu, \quad A \in \mathcal{L},$$

dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e μ è la misura unidimensionale di Lebesgue.

a) Provare che φ è una misura relativa su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

b) Per tale misura relativa φ individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

c) Calcolare $\varphi(B)$, dove $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \pi/2\}$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio di Hilbert ℓ^2 delle successioni reali $x = (x_k)$ tali che la serie $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2$ converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Inoltre, per ogni intero $n \geq 1$ sia T_n l'operatore da ℓ^2 in sè che a $x = (x_k)$ associa $y = T_n x$ con

$$y_k = x_k \text{ per } k < n, \quad y_k = x_{k+1} \text{ per } k \geq n.$$

a) Provare che per n fissato T_n è lineare e continuo.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ calcolare $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2;\ell^2)}$.

c) Studiare iniettività e suriettività dell'operatore T_3.

d) La successione di operatori $\{T_n\}$ risulta convergente nello spazio $\mathcal{L}(\ell^2;\ell^2)$?

Esercizio 4. Si consideri la funzione $2\pi-$periodica f definita da

$$f(x) = \cos(2x+1) - \sin(4-3x), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

a) Sviluppare f in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

b) discutere la convergenza puntuale, uniforme e in $L^2(\mathbb{T})$ della serie trovata.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino 6 luglio 2015

Esercizio 1. Posto, per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{se } \ n < x < n+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} ,$$

si risponda alle seguenti domande.

a) Perché le funzioni f_n sono (misurabili e) integrabili in $\mathbb{R}$?

b) Studiare la convergenza q.o. della successione $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$.

c) È possibile applicare alla successione $\{f_n\}$ i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale? Se si, quali? Se no, perché?

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio $H = L^2(-1, 1)$

$$X = \{u \in H : \ u(x) = a + bx^2, \ x \in (-1, 1), \ \text{per una coppia } (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } \ -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{if } \ x = 0 \\ 1 & \text{if } \ 0 < \chi \leq 1 \end{cases} .$$

a) Dire perché $f \in H$ e perché X è un sottospazio di H.

b) X è chiuso in H?

c) Trovare la proiezione di f su X.

ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 3 settembre 2015

Esercizio 1. Nello spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \int_A \frac{x}{1+x^4}\, d\mu, \quad A \in \mathcal{L},$$

dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e μ è la misura unidimensionale di Lebesgue.

a) φ è una misura relativa su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$?

b) Per tale misura relativa φ individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

c) Calcolare $\varphi(B)$, dove $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$.

Esercizio 2. Siano X lo spazio $\mathbb{R}^2$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e Y lo spazio $\mathbb{R}^5$ munito della norma $\|\cdot\|_1$. Dare un esempio di operatore lineare e continuo

$$T : X \to Y \quad \text{tale che} \quad T(1,1) = (1, 0, -2, 0, 1).$$

Una volta scritto l'operatore, controllare esplicitamente che tale operatore è limitato da X in Y.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 4 dicembre 2015

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + (nx)^2}\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

per $n \in \mathbb{N}$.

a) Studiare misurabilità e integrabilità in $\mathbb{R}$ di queste funzioni.

b) La successione f_n converge q.o. in $\mathbb{R}$?

c) Esaminare anche la convergenza quasi uniforme, in misura e in $L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Dare un esempio di misura relativa φ sullo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, tale che

$$\varphi([-1,1]) = -1, \quad \varphi((-\infty, 0]) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi((0, +\infty)) = 1.$$

Inoltre, per tale misura relativa individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

Esercizio 3. Nello spazio c_0 delle successioni $a = (a_1, a_2, \ldots)$ reali e infinitesime poniamo

$$\|a\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, \quad |||a||| := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |a_n|, \quad \text{per } a \in c_0.$$

a) Dimostrare che $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ definiscono effettivamente due norme in c_0.

b) Discutere l'equivalenza delle due norme, soffermandosi sulla validità o meno delle due proprietà

$$\text{esiste una costante } C > 0 \text{ tale che } |||a||| \leq C\|a\| \text{ per ogni } a \in c_0; \tag{1}$$

$$\text{esiste una costante } D > 0 \text{ tale che } \|a\| \leq D\,|||a||| \text{ per ogni } a \in c_0. \tag{2}$$

Esercizio 4. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = x + y\}.$$

a) Mostrare che X è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. È chiuso?

b) Individuare ed esplicitare il sottospazio $Y = X^{\perp}$.

c) Calcolare la proiezione del vettore $(1, 1, 1)$ su X.

d) Calcolare la proiezione del vettore $(1, 1, 1)$ su Y.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 gennaio 2014

Esercizio 1. Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata.

a) Provare che se f è continua in $[-1,1]$, il suo grafico

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le x \le 1, \ y = f(x)\}$$

ha misura bidimensionale di Lebesgue nulla.

b) Se f è continua nei punti dell'intervallo aperto $(-1,1)$, possiamo ancora concludere che $G(f)$ è misurabile secondo Lebesgue e ha misura nulla?

Esercizio 2. Sia $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 non crescente e non negativa. Ci interessiamo alla successione di funzioni $f_n(x) = g\big(x^n\big)$, $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, e al limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,+\infty)} f_n(x)dx, \tag{L}$$

dove naturalmente l'integrale qui sopra può anche essere uguale a $+\infty$ per qualche indice n.

a) Dire se esistono (finiti o infiniti) i limiti $L_0 = \lim_{t\to 0^+} g(t)$, $L_\infty = \lim_{t\to+\infty} g(t)$ e quanto possono valere (fare esempi di funzioni g).

b) Provare che se $L_\infty > 0$, allora il limite in (L) vale $+\infty$.

c) Provare che se $L_\infty = 0$ ma $L_0 = +\infty$ allora il limite in (L) vale ancora $+\infty$.

d) Nel caso in cui $L_\infty = 0$ e L_0 è finito e diverso da 0, discutere separatamente il comportamento dei due integrali $\int_{(0,1)} f_n(x)dx$, $\int_{(1,+\infty)} f_n(x)dx$ al tendere di n a ∞ e conseguentemente trovare il valore del limite in (L).

Esercizio 3. Dare un esempio di operatore lineare e continuo da $L^2(\mathbb{R})$ in ℓ^1 che non sia iniettivo e che abbia norma esattamente uguale ad 1.

Esercizio 4. Nello spazio di Hilbert $X = L^2(\mathbb{T})$ si consideri il sistema ortonormale completo $S = \big\{\sqrt{2}/2, \ \cos(kx), \ \sin(kx); \ k \in \mathbb{N}, \ k \neq 0\big\}$ rispetto al seguente prodotto scalare $(f,g)_X := \pi^{-1} \int_{(-\pi,\pi)} f(x)g(x)dx$, $f,g \in X$. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π e tale che

$$u(x) = 1 \ \text{ se } x \in [-\pi,-\pi/2] \cup [0,\pi/2], \qquad u(x) = -1 \ \text{ se } x \in (-\pi/2,0) \cup (\pi/2,\pi).$$

a) Osservato che $u \in X$, sviluppare la funzione u in serie di Fourier rispetto al sistema S.

b) Utilizzare il risultato trovato per calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 24 febbraio 2014

Esercizio 1. Posto $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ e $f_n(x) = g(nx)\,\chi_{[-n,n]}(x)$ per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ (ove, al solito, χ_A indica la funzione caratteristica dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$), per la successione $\{f_n\}$ si studino le convergenze

a) quasi ovunque, quasi uniforme e in misura su tutto $\mathbb{R}$;

b) in $L^1(\mathbb{R})$ e in $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$.

Esercizio 2. Posto $f(x) = \text{segno}(\sin(2x))$ per $x \in [-\pi, \pi]$, dove $\text{segno}(t)$ è la funzione che vale 1 per $t > 0$, -1 per $t < 0$, 0 per $t = 0$,

a) calcolare la variazione totale di f in $[-\pi, \pi]$.

b) Esprimere f come differenza di due funzioni monotone non decrescenti.

c) Calcolare la derivata quasi ovunque di f e dire se per f vale il teorema fondamentale del calcolo in $[-\pi, \pi]$.

d) Sviluppare f in serie di Fourier rispetto al sistema ortonormale completo $S = \{\sqrt{2}/2,\ \cos(kx),\ \sin(kx);\ \ k \in \mathbb{N},\ k \neq 0\}$ quando si consideri il prodotto scalare

$$(f, g) := \pi^{-1} \int_{(-\pi,\pi)} f(x)g(x)dx, \quad f, g \in X.$$

Esercizio 3. Dare un esempio di operatore lineare e continuo da $\mathbb{R}^3$ in $L^\infty(-1, 1)$ che sia iniettivo e che abbia norma esattamente uguale ad 3.

Esercizio 4. Posto $H = L^2(\mathbb{R})$, sia $F : H \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$F(u) = \int_{(1,2)} u(x)dx - \int_{(0,1)} u(x)dx, \quad u \in H,$$

gli integrali essendo intesi nel senso di Lebesgue.

a) F è lineare e continuo? In caso affermativo, si calcoli $\|F\|_{H'}$.

b) Determinare tutti e soli gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $E_\alpha = \{u \in H :\ F(u) = \alpha\}$ è chiuso, è convesso, è un sottospazio.

c) Sia ora $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che E_α è sottospazio chiuso di H. Controllato che la funzione $w(x) := e^{-|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$, individua un elemento di H, determinare la proiezione di w su E_α.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 settembre 2014

Esercizio 1. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione, $\{u_n\}$ una successione di funzioni misurabili tale che $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ q.o. in Ω, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sappiamo che

$$u_n \to u \ \text{ q.o. in } \ \Omega, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^2 dx = 100.$$

Utilizzando queste informazioni, dimostrare che

a) $u \in L^2(\Omega)$;

b) $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 10$;

c) $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$.

Esercizio 2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia $(\Omega, \mathcal{L}, \lambda)$ lo spazio di misura caratterizzato dalla σ-algebra $\mathcal{L}$ dei sottoinsiemi di Ω misurabili secondo Lebesgue e dalla misura λ di Lebesgue.

a) Provare che l'insieme X delle misure relative definite su $(\Omega, \mathcal{L})$ è un spazio vettoriale.

b) Dare almeno un esempio di sottospazio proprio di X di dimensione infinita.

c) Provare che data una misura relativa φ su $(\Omega, \mathcal{L})$ esistono sempre due misure relative μ e ν tali che μ è λ-assolutamente continua, ν è λ-singolare e inoltre $\varphi = \mu + \nu$.

d) Le misure relative μ λ-assolutamente continua e ν λ-singolare tali che $\varphi = \mu+\nu$ sono univocamente determinate? oppure può esistere una decomposizione diversa di φ?

Esercizio 3. Posto $E = \{f \in C^1([0,1]) : \ f(0) = 0\}$, si definisca $\|f\|_E = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|$.

a) Si provi che E è uno spazio vettoriale e che $\| \cdot \|_E$ è effettivamente una norma.

b) Rispetto alla norma $\| \cdot \|_E$, E è uno spazio di Banach?

c) Si consideri l'operatore lineare $L : E \to C^0([0,1])$ definito da $(Lf)(x) = e^x f'(x)$, $x \in [0,1]$. Si provi che L è continuo.

d) Dimostrare che L è sia iniettivo che suriettivo e fornire una rappresentazione esplicita dell'operatore inverso.

Esercizio 4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione $2\pi-$periodica f definita da

$$f(x) = \cos(4x)\cos x + 3 - \sin(2x) - \sin x\,\sin(4x), \quad x \in [0, 2\pi],$$

rispetto al sistema ortonormale completo

$$\{(2\pi)^{-1/2},\ \pi^{-1/2}\sin(nx),\ \pi^{-1/2}\cos(nx)\}.$$

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 12 dicembre 2014

Esercizio 1. Studiare l'integrabilità (secondo Lebesgue) della funzione

$$f_\alpha(x) = |\ln x|^\alpha, \quad x \in (0,1),$$

sull'intervallo $(0,1)$ per tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Dare un esempio di misura relativa φ sullo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, tale che

$$\varphi([1,2]) = 3 \quad \text{e} \quad \varphi((0,+\infty)) = -2.$$

Inoltre, per tale misura relativa individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore φ^+, variazione inferiore φ^- e variazione totale $|\varphi|$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio $\mathbb{R}$ munito dell'ordinaria misura di Lebesgue. Ogni funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ genera un operatore $M_f : L^2(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ definito da $M_f(g)(x) := f(x)g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Verificare linearità e continuità di M_f.

b) Provare che $\|M_f\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R});L^1(\mathbb{R}))} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$.

c) Se fissiamo invece $f \in L^4(\mathbb{R})$, lo stesso operatore M_f è ancora ben definito da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R})$?

Esercizio 4. Sia $f(x)$ la funzione $2\pi-$periodica tale che $f(x) = x$ per $-\pi < x \leq \pi$.

a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

rispetto al prodotto scalare $(f,g) := \pi^{-1} \int_{(-\pi,\pi)} f(x)g(x)dx, \quad f,g \in L^2(\mathbb{T})$.

b) Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare $S(\pi)$.

c) Calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 24 gennaio 2013

Esercizio 1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile secondo Lebesgue e di misura finita. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili e tali che

1) $\displaystyle\int_\Omega |f_n(x)|^2 dx < 8$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

2) f_n converge a f q.o. in Ω.

La funzione limite f è misurabile? è integrabile in Ω?

Esercizio 2. La funzione $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 2/\pi \\ x\sin(1/x) & \text{se } 2/\pi < x \le 4/\pi \\ \cos x & \text{se } 4/\pi < x \le \pi \end{cases}$$

è a variazione limitata? è assolutamente continua?

Esercizio 3. Introdotto l'insieme

$$Y = \Big\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \ : \ f,\, f' \text{ sono limitate in } \mathbb{R} \text{ e } f(0) = 0 \Big\},$$

controllare che Y è uno spazio vettoriale e dimostrare che

$$\|f\|_c = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|, \quad \|f\|_d = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$$

sono entrambe norme in Y ma non sono equivalenti.

Esercizio 4. Posto, l'integrale essendo inteso nel senso di Lebesgue,

$$a(u,v) = \int_{(0,1)} t^{-1/2} u(t) v(t) dt \qquad (*)$$

per tutte le funzioni $u,\, v : (0,1) \to \mathbb{R}$ misurabili e tali che la funzione $t \mapsto t^{-1/2}u(t)v(t)$ sia integrabile in (0,1),

(i) provare che $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ verifica tutte le proprietà di un prodotto scalare;

(ii) $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ definisce effettivamente un prodotto scalare in $L^2(0,1)$?

(iii) Siete in grado di individuare classi di funzioni X tali che per $u,\, v \in X$ l'integrale in $(*)$ ha senso?

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 20 febbraio 2013

Esercizio 1. Si consideri lo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la famiglia degli insiemi misurabili secondo la misura unidimensionale di Lebesgue μ. Introdotta la funzione di insieme

$$\nu(A) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n\in A\cap\mathbb{Z}\cap[-k,k]} 2^{-|n|}, \quad \text{per } A \in \mathcal{L},$$

provare che ν è una misura su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$. Inoltre, ν è σ-finita? è assolutamente continua o singolare (oppure né assolutamente continua né singolare) rispetto alla misura μ?

Esercizio 2. Per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in (0, +\infty)$ si consideri la funzione

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^{-2/\pi} & \text{se } 0 < x \leq (n+3)^{-1} \\ \pi^{-(n+2)x} & \text{se } x > (n+3)^{-1} \end{cases}$$

Discutere la convergenza di $\{f_n\}$ in $(0, +\infty)$ quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in $L^1(0, +\infty)$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio c_0 delle successioni $u = (u_1, u_2, \dots)$ reali e infinitesime, munito della norma $\|u\|_{c_0} := \sup\{|u_k|,\ k \in \mathbb{N}\}$. Sia $a = (a_1, a_2, \dots)$ una successione reale tale che

$$\text{la serie } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ converge e ha per somma 1.}$$

a) Provare che il funzionale $F : c_0 \to \mathbb{R}$, $F(u) := \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$, è ben definito, lineare e limitato.

b) Calcolare esplicitamente la norma $\|F\|_{(c_0)'}$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio $L^2(-1,1)$ delle (classi di) funzioni $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ misurabili e di quadrato sommabile in $(-1,1)$. Sia inoltre $C \subset L^2(-1,1)$ il sottoinsieme delle funzioni f tali che

$$\|f-1\|_{L^2(-1,1)} \leq 3, \qquad f \geq 0 \text{ q.o. in } (-1,1), \qquad \int_{(-1,1)} xf(x)dx = 0.$$

(i) Provare che C è non vuoto, convesso e chiuso in $L^2(-1,1)$.

(ii) Ricorrendo alla proprietà di distanza minima, trovare la proiezione su C della funzione $g(x) = -1 - x$, $x \in (-1,1)$.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 1 luglio 2013

Esercizio 1. Perché l'insieme

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \begin{array}{r} (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \leq \left|x\,3^{-x^2}\right| \ \text{ se } \ 2k \leq x \leq 2k+1, \\ 0 < y < 2\,x\,3^{-x^2} \ \text{ se } \ 2k+1 \leq x \leq 2k+2 \end{array} \right\}$$

è misurabile rispetto alla misura bidimensionale μ di Lebesgue e di misura finita in $\mathbb{R}^2$? Calcolare $\mu(A)$.

Esercizio 2. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx}, \quad x \in (0,1), \ \ n \in \mathbb{N},$$

a) discutere la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di $\{f_n\}$ in $(0,1)$;

b) le funzioni f_n sono integrabili in $(0,1)$?

c) esiste finito il

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)dx\,?$$

Esercizio 3. Per $f \in L^1(\mathbb{R})$ si consideri la funzione misurabile

$$g(x) = \int_{(x,+\infty)} f(t) \arctan t \, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Provare che g è ben definita e che $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

b) Sia ora $T : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ l'operatore definito da $Tf = g$: si chiede se T è lineare oppure no.

c) L'operatore T è continuo? Motivare per bene la risposta.

Esercizio 4. Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio $H = L^2(-2,2)$

$$X = \{u \in H : \ u(x) = a + bx^2, \ x \in (-2,2), \text{ per una coppia } (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{if } \ -2 \leq x < 0 \\ 0 & \text{if } \ x = 0 \\ x-1 & \text{if } \ 0 < x \leq 2 \end{cases} \quad .$$

a) Dire perché $f \in H$ e perché X è un sottospazio di H.

b) X è chiuso in H?

c) Trovare la proiezione di f su X.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 24 settembre 2013

Esercizio 1. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri interi positivi e sia $\# : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la funzione di insieme definita da

$$\#(E) = \text{cardinalità di } E, \quad E \subseteq \mathbb{N},$$

intendendo naturalmente che $\#(E) = +\infty$ se E è infinito.

a) Verificare che $\#$ è una misura σ-finita su $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

b) Considerato lo spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$, si precisino le condizioni perché una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sia misurabile. E quando invece $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è integrabile?

Esercizio 2. Sia $f \in L^1(0, +\infty) \cap C^1([0, +\infty))$. Calcolare, giustificando la risposta, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\ln(n+1)}^{\sqrt{n+5}} f(x)dx.$$

Esercizio 3. Introdotto lo spazio $X = C^0([-1, 1])$ e posto

$$\|f\| := \max\{|f(-1)|, |f(1)|\} + \int_{-1}^{1} |f(x)|dx, \quad |||f||| := \max_{-1\le x\le 1} |f(x)|, \qquad \text{per } f \in X,$$

a) dimostrare che $\| \cdot \|$ e $|||\cdot|||$ definiscono effettivamente due norme in X;

b) discutere l'equivalenza delle due norme, soffermandosi sulla validità o meno delle due proprietà

$$\text{esiste una costante } C > 0 \text{ tale che } \|f\| \le C\,|||f||| \text{ per ogni } f \in X; \tag{3}$$

$$\text{esiste una costante } D > 0 \text{ tale che } |||f||| \le D\|f\| \text{ per ogni } f \in X. \tag{4}$$

Esercizio 4. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x - y = 2z\}.$$

a) Mostrare che X è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. È chiuso?

b) Individuare ed esplicitare il sottospazio $Y = X^\perp$.

c) Calcolare la proiezione del vettore $(2, 2, 3)$ su X.

d) Calcolare la proiezione del vettore $(2, 2, 3)$ su Y.

ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 20 novembre 2013

Esercizio 1. Si consideri lo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ denota la famiglia degli insiemi misurabili secondo la misura unidimensionale di Lebesgue λ. Consideriamo le funzioni di insieme

$$\mu(A) = \lambda(\{x \in A : \ x \leq 0\}), \quad \nu(A) = \lambda(\{x \in A : \ x \geq 0\}) \quad \text{per } A \in \mathcal{L}.$$

a) Provare che μ, ν sono misure su $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$. Sono σ-finite?

b) Valutare se μ, ν sono assolutamente continue o singolari (oppure né assolutamente continue né singolari) rispetto alla misura λ.

c) λ è assolutamente continua o singolare rispetto a μ?

d) μ è assolutamente continua o singolare rispetto a ν?

Esercizio 2. Utilizzando l'estensione del teorema fondamentale del calcolo, provare che la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in [-1, 1]$, è assolutamente continua.

Esercizio 3. Considerata la successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{-1/n} x^{2n}, \quad x \in [-1, 1],$$

studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in tutti gli spazi $L^p([-1, 1])$, per $1 \leq p \leq \infty$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio di Hilbert $H = \ell^2$ delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Si definisca

$$K = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in H : \quad 0 \leq x_n \leq n^{-3} \ \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si chiede di rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

a) L'insieme K potrebbe essere vuoto? Provare che K è un sottoinsieme convesso e chiuso di H.

b) Mostrare che l'elemento $w = (w_1, w_2, \ldots)$, con $w_n = (-1)^n/n$ per $n \in \mathbb{N}$, appartiene ad H.

c) Ricordare il teorema delle proiezioni e calcolare esplicitamente la proiezione dell'elemento w su K.