ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta del 23 gennaio 2007

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e non negativa; si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \max\{3f(x) - 2n, 0\}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Provare che se f è integrabile allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 0. \tag{L}$$

Trovare poi un esempio di funzione f non integrabile per cui non valga (L).

Esercizio 2. Siano H e V due spazi di Hilbert con prodotti scalari $(\cdot\,,\,\cdot)_H$ e $(\cdot\,,\,\cdot)_V$ rispettivamente.

a) Provare che anche lo spazio prodotto $H \times V$ è uno spazio di Hilbert rispetto ad un opportuno prodotto scalare.

b) Provare che l'insieme $K = \{(h, v) \in H \times V : \|v\|_V \leq 2\}$ è un convesso chiuso non vuoto di $H \times V$.

c) Per un generico elemento $(k, z) \in H \times V$ si individui la proiezione di (k, z) su K.

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ 1 & \text{se } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

a) Si tracci il grafico di f.

b) Si estenda f ad una funzione periodica di periodo 2π e se ne scriva lo sviluppo in serie di Fourier rispetto al sistema ortonormale $\Gamma = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos kx,\ \sin ky;\ \ k \in \mathbb{N},\ k \neq 0\right\}$.

c) Si utilizzi il risultato per calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Esercizio 4. Posto, per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g(x) = |x|^{-1/\pi}$ e $g(0) = 3$, fornire un esempio di successione di funzioni $\{g_n\}$ tali che

(i) $g_n(x) \neq g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(iii) g_n converga a g uniformemente in $\mathbb{R}$.

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta del 20 febbraio 2007

Esercizio 1. Per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [-1,1]$ si consideri la funzione $f_n(x) = (n+1)x^n(1-|x|)$. Se ora $g \in L^1([-1,1])$,

a) discutere la misurabilità e l'integrabilità della funzione $x \mapsto f_n(x)g(x)$ sull'insieme $[-1,1]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n(x)g(x)dx$$
motivando per bene la risposta data.

Esercizio 2. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e sia f un elemento di $L^\infty(\Omega)$ con $\|f\|_\infty > 0$.

a) Controllare che $f \in L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1,\infty)$.

b) Provare ora in generale che l'operatore lineare di immmersione
$$i : L^\infty(\Omega) \to L^p(\Omega), \qquad i(g) = g \quad \text{per} \quad g \in L^\infty(\Omega),$$
è limitato, calcolando esplicitamente una costante di limitatezza.

c) Utilizzando in modo particolareggiato la definizione di limite, provare che
$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Esercizio 3. Sia X uno spazio di Hilbert rispetto alla norma $\|\cdot\|_X$ indotta dal prodotto scalare $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle_X$. Siano x, y due elementi fissati in X tali che
$$\|tx + (1-t)y\|_X = \|x\|_X \quad \text{per ogni} \quad t \in [0,1]. \tag{N}$$

a) Controllare che l'insieme $V = \{tx + (1-t)y : \ t \in [0,1]\}$ è un chiuso convesso non vuoto dello spazio di Hilbert X.

b) Provare che la condizione (N) implica necessariamente $x = y$.

c) L'asserto $\boxed{\text{(N)} \Rightarrow x = y}$ è ancora vero nel caso in cui $(X, \|\cdot\|_X)$ sia uno spazio di Banach con norma non indotta da un prodotto scalare? Dare una dimostrazione o fornire un controesempio.

Esercizio 4. Se B è la palla unitaria chiusa di $\mathbb{R}^3$, cioè
$$B = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) : \ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \ \leq 1 \right\},$$
studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$u_n(x) = |x|^{2n}(1-|x|^2), \quad x \in B.$$

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta 11 luglio 2007

Esercizio 1. Siano $f(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$, $x \in \mathbb{R}$, e g una funzione assegnata in $L^\infty(\mathbb{R})$.

a) Studiare la convergenza q.o. in $\mathbb{R}$ delle successioni di funzioni

$$u_n(x) = f(x+n)g(x), \quad v_n(x) = f(nx)g(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Discutere i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} v_n(x)dx$$

eventualmente utilizzando teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Esercizio 2. Se Q è il quadrato di $\mathbb{R}^2$

$$Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leq 1\right\},$$

dare un esempio di sottospazio V dello spazio $L^1(Q)$ che abbia dimensione finita uguale a 55. Dire inoltre se il sottospazio V che avete scelto è chiuso.

Esercizio 3. Sviluppare in serie di Fourier la funzione $2\pi-$periodica dispari che coincide con $\cos x$ per $x \in (0,\pi)$ e vale 0 per $x = 0, \pi$, rispetto al sistema ortonormale completo

$$\left\{(2\pi)^{-1/2},\, \pi^{-1/2}\sin(nx),\, \pi^{-1/2}\cos(nx)\right\}.$$

Esercizio 4. Posto, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0, +\infty)$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+nx)^\alpha},$$

al variare di $\alpha > 0$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \geq 0.$$

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta 20 settembre 2007

Esercizio 1. Posto $\alpha_n = -\sqrt[7]{\frac{2}{\pi}\arctan\frac{3n^3+5}{2-7n^2}}$ per $n \in \mathbb{N}$, calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \sin x^{\alpha_n}\,dx.$$

Esercizio 2. Se Q è il quadrato di $\mathbb{R}^2$ definito da $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \le 1\}$, e V è l'insieme

$$V = \{P(x,y) : P \text{ è un polinomio nelle variabili } x,y \text{ di grado minore o uguale a } 3\},$$

rispondere alle seguenti domande giustificando le risposte date.

a) Dire se V è contenuto o meno in $L^2(Q)$.

b) Provare che V è un sottospazio di $L^1(Q)$.

c) Il sottospazio V è chiuso in $L^1(Q)$?

d) Dire se il sottospazio V ha dimensione finita e, in caso affermativo, calcolarla esplicitamente.

Esercizio 3. Sia X l'insieme delle (classi di) funzioni $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ misurabili (e tra loro uguali q.o.) tali che

$$f \in L^1(0,R) \quad \forall\, R > 0; \qquad \|f\|_X = \sup_{t\ge 0}\int_{(t,t+1)} |f(x)|dx < +\infty.$$

a) Provare che X è uno spazio vettoriale e che $\|\cdot\|_X$ definisce effettivamente una norma in X.

b) Provare l'inclusione $L^1(0,+\infty) \subset X$ e mostrare che $X \ne L^1(0,+\infty)$.

c) Discutere la validità o meno delle inclusioni $L^\infty(0,+\infty) \subset X$ e $X \subset L^\infty(0,+\infty)$ motivando per bene le risposte.

d) Lo spazio X è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|_X$?

Esercizio 4. Fornire tre esempi di serie di potenze reali, del tipo $\sum a_n(x-x_0)^n$, rispettivamente con le seguenti caratteristiche:

a) con raggio si convergenza $1/2$ e tale che **converga uniformemente** nell'intervallo chiuso $[1,2]$;

b) con raggio di convergenza 3 e tale che **non converga** per $x = 0$;

c) con raggio di convergenza infinito e centro nel punto $x_0 = -5$.

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta 24 gennaio 2008

Esercizio 1. Calcolare il valore del limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} \frac{1}{1+|x|^{3/2}+y^2} dxdy,$$

dove $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq n^2\}$, giustificando la risposta data.

Esercizio 2. Per $f \in L^1(\mathbb{R})$ si consideri la funzione misurabile

$$g(x) = \int_{(-\infty,x)} f(t) \sin t \, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Provare che g è ben definita e che $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

b) Sia ora $T : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ l'operatore definito da $Tf = g$: si chiede se T è lineare oppure no.

c) L'operatore T è continuo? Motivare per bene la risposta.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio $X = C^0([-1,1])$ delle funzioni continue definite sull'intervallo chiuso $[-1,1]$ a valori reali, e si definisca per ogni $f, g \in X$

$$\langle f, g \rangle_X = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx.$$

a) Si provi che $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ è un prodotto scalare su X.

b) Si dica se $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ è uno spazio di Hilbert, fornendo una dimostrazione o esibendo un controesempio [*Suggerimento:* potrebbe essere utile considerare la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da $f_n(x) = -1$ per $-1 \leq x \leq -1/n$, $f_n(x) = nx$ per $|x| \leq 1/n$, $f_n(x) = 1$ per $1/n \leq x \leq 1$].

c) Posto $V := \{ax^2 + (1-a)x + 1, \;\; x \in [-1,1] : a \in \mathbb{R}\}$, si dica se per ogni $f \in X$ esiste un unico elemento $u \in V$ tale che $\|f-u\|_X = \min_{v\in V} \|f-v\|_X$, dove $\|\cdot\|_X$ è la norma associata a $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, fornendo una dimostrazione o esibendo un controesempio.

d) Si dica ora se per ogni $f \in L^2(-1,1)$ esiste un unico elemento $w \in V$ tale che $\|f-w\|_2 = \min_{v\in V} \|f-v\|_2$ dove $\|\cdot\|_2$ è la norma usuale su $L^2(-1,1)$.

Esercizio 4. Trovare l'insieme di convergenza $I \subseteq \mathbb{R}$ della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{x}{n}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Determinare poi eventuali sottoinsiemi di I su cui la serie converge uniformente, giustificando le risposte date.

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta 27 febbraio 2008

Esercizio 1. Sia $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ misurabile e tale che $0 \leq g(x) \leq x^3$ per ogni $x > 0$. Posto $f_n(x) = g(x + n)$ per $x \in (0, 1)$ e $n \in \mathbb{N}_0$, provare che

a) le funzioni f_n sono tutte integrabili in $(0, 1)$;

b) se la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)dx$ converge, allora g è integrabile in $(0, +\infty)$;

c) se g è integrabile in $(0, +\infty)$, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge q.o. in $(0, 1)$ a una funzione $s(x)$ integrabile in $(0, 1)$.

Esercizio 2. Per $p \in [1, +\infty)$ si indichi con ℓ^p lo spazio delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \dots)$ tali che la serie $\|x\|_p^p := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ converga. Inoltre, sia ℓ^∞ lo spazio delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \dots)$ limitate, munito dell'usuale norma $\|x\|_\infty := \sup\limits_{n \geq 1} |x_n|$. Si consideri l'applicazione T definita per $x \in \ell^\infty$ da

$$T : x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto y = (y_1, y_2, \dots), \quad \text{con } y_n = \frac{x_n}{n}.$$

a) Provare che T è lineare.

b) Controllare che T è ben definita da ℓ^∞ in ℓ^p se $p > 1$.

c) Mostrare invece che $T(\ell^\infty) \not\subset \ell^1$.

d) Posto ora $p = 2$, si chiede se l'operatore $T : \ell^\infty \to \ell^2$ è continuo.

e) L'operatore $T : \ell^\infty \to \ell^2$ è iniettivo? è suriettivo?

Esercizio 3. Sia F una funzione assegnata in $L^2(-\pi, \pi)$. È possibile calcolare il valore dei seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(-\pi,\pi)} F(x) \sin(nx)\, dx \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{(-\pi,\pi)} F(x) \cos(nx)\, dx \ ?$$

Dopo aver risposto a questa domanda, studiare il $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{(-\pi,\pi)} F(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)\, dx$.

Esercizio 4. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \sin(x/n)$, $x \in \mathbb{R}$, come pure della successione delle derivate.

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta 1 luglio 2008

Esercizio 1. In tutto questo esercizio sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni tale che

$$\begin{cases} f_n \to 0 \ \text{ q.o. in } \mathbb{R} \text{ rispetto alla misura unidimensionale di Lebesgue,} \\ \text{per ogni } \ n \in \mathbb{N} \quad f_n \text{ è integrabile in } \mathbb{R} \ \text{ e } \ 0 \le f_n(x) \le 1 \ \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{C}$$

a) Si controlli se la successione $f_n(x) = |\sin(x/n)|$, $x \in \mathbb{R}$, verifica le condizioni (C);

b) indicata con χ_A la funzione caratteristica di un insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}$, si controlli se la successione $f_n(x) = (1+|x|)^{-1}\chi_{[n,n+2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, verifica (C) e inoltre si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$;

c) fornire un esempio di successione $\{f_n\}$ che verifichi sia (C) che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 3$;

d) notato che in generale con le sole condizioni (C) non vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale, proporre ulteriori condizioni sulla successione $\{f_n\}$ che garantiscano che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 0$.

Esercizio 2. Sia $M \subset L^1(0,1)$ l'insieme costituito da tutte le (classi di) funzioni tali che $\int_{(0,1)} f(x)dx = 1$.

a) Provare che M è un sottoinsieme chiuso e convesso di $L^1(0,1)$.

b) M contiene un elemento di norma minima? Se si, tale elemento è unico?

Motivare le risposte date.

Esercizio 3. Sviluppare in serie di Fourier la funzione g definita da

$$g(x) = \begin{cases} \pi & \text{se } 0 < x \le \pi \\ x - 2\pi & \text{se } \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

e $2\pi-$periodica rispetto al sistema ortonormale completo

$$\left\{(2\pi)^{-1/2},\ \pi^{-1/2}\sin(nx),\ \pi^{-1/2}\cos(nx)\right\}.$$

Scrivere poi l'identità di Parseval relativa alla funzione g e alla sua serie di Fourier.

Esercizio 4. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^{3n}}{(2n)!}$$

dare tre esempi di successioni numeriche $\{b_n\}$ tali che, rispettivamente,

a) la serie di potenze abbia raggio di convergenza 0;

b) la serie di potenze converga nel punto $x = -2$ ma non converga per $x = 4$;

c) la serie di potenze converga in tutti i punti $x \in \mathbb{N}$.

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta 10 settembre 2008

Esercizio 1. Studiare la convergenza quasi ovunque della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \arctan n}$$

nell'intervallo $[-1, 1]$. Valutare poi la misurabilità e l'integrabilità della funzione somma della serie in $[-1, 1]$ o, eventualmente, in sotto-intervalli.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio $\mathbb{R}$ munito dell'ordinaria misura di Lebesgue. Ogni funzione $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ genera un operatore $M_f : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definito da $M_f(g)(x) := f(x)g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Verificare linearità e continuità di M_f.

b) Provare che $\|M_f\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R});L^2(\mathbb{R}))} \leq \|f\|_\infty$ per ogni $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

c) Per quali $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ l'operatore M_f è iniettivo?

d) Per quali $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ l'operatore M_f è suriettivo?

Esercizio 3. Sia $K \subset L^1(0, 1)$ l'insieme costituito da tutte le (classi di) funzioni tali che $\int_{(0,1)} f(x)dx = 1/2$.

a) Provare che K è un sottoinsieme chiuso e convesso di $L^1(0, 1)$.

b) K contiene un elemento di norma minima? Se si, tale elemento è unico?

Motivare le risposte date.

Esercizio 4. Trovare l'insieme di convergenza $I \subseteq \mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n^3} \frac{|\cos x|^k}{k \arctan k^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determinare poi eventuali sottoinsiemi di I in cui la successione converge uniformemente, giustificando le risposte date.

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta del 19 gennaio 2009

Esercizio 1. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+n^2x^2\right)^2},$$

studiare la convergenza della serie in $L^1(1,+\infty)$.

Esercizio 2. Motivando per bene le risposte, dire se ciascuna delle seguenti $N_i(f)$, $i=1,\dots 4$, è una norma in $C^2([-1,1])$ e, in caso affermativo, valutare se $C^2([-1,1])$ risulta uno spazio di Banach rispetto a tale norma.

a) $N_1(f) = \sup_{[-1,1]} |f'| + |f(0)|$;

b) $N_2(f) = \sup_{[-1,1]} |f''| + |f(0)|$;

c) $N_3(f) = \sup_{[-1,1]} |f''| + 2|f(0)| + |f'(0)|$;

d) $N_4(f) = \sup_{[-1,1]} |f''| + |f(-1)| + |f(1)|$.

Esercizio 3. Sia $K \subset L^2(-\pi,\pi)$ l'insieme costituito da tutte le (classi di) funzioni $f \in L^2(-\pi,\pi)$ tali che f è una funzione pari (o, più precisamente, esiste un rappresentante della classe che è pari).

a) Provare che K è un sottoinsieme convesso e chiuso di $L^2(-\pi,\pi)$.

b) Dato $w \in L^2(-\pi,\pi)$, provare che la proiezione di w su K è data da

$$P_K(w)(x) = \frac{w(x)+w(-x)}{2}, \qquad x \in (-\pi,\pi).$$

c) Considerato il funzionale $J : L^2(-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ definito da

$$J(v) = \int_{(-\pi,\pi)} \Big((v(x)-\sin x)^2 + x + 1\Big)dx,$$

dire se J ammette minimi in K e, in caso affermativo, ricavarli esplicitamente.

Esercizio 4. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie dell'Esercizio 1 in tutto $\mathbb{R}$ ed eventualmente sui sottointervalli.

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta del 26 febbraio 2009

Esercizio 1. Sia B un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^3$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili e non negative in B tali che $f_n \to f$ q.o. in B e

$$\int_B f_n(x)dx \leq 13 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

a) Dire se f è misurabile.

b) La funzione limite f è anche integrabile in B oppure non possiamo concludere nulla sull'integrabilità di f?

Esercizio 2. Sia X l'insieme delle funzioni $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ lipschitziane, cioè tali che

$$\exists\, L \geq 0 \ : \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall\, x, y \ \in [-1,1].$$

a) Dire se X è uno spazio vettoriale.

b) Discutere le due inclusioni $C^0([-1,1]) \subset X$ e $X \subset L^1(-1,1)$: vere o false? e perché?

c) Posto $N(f) = \sup\left\{ \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|},\ x,y \in [-1,1],\ x \neq y \right\}$ per $f \in X$, verificare le proprietà di norma di $N(\cdot)$ e provare che $N(\cdot)$ non è una norma in X.

d) Introducendo opportuni correttivi a $N(\cdot)$, siete in grado di definire una norma in X rispetto alla quale X risulti completo?

Esercizio 3. Sia H uno spazio di Hilbert e siano X e Y due sottospazi di H diversi dal sottospazio nullo e tra loro ortogonali, cioè $(x,y) = 0$ per ogni $x \in X,\ y \in Y$.

a) Quale relazione sussiste tra Y e $X^\perp$?

b) È vero o no che almeno uno fra X e Y deve essere chiuso?

c) Se X e Y sono entrambi chiusi, la loro somma diretta $X \oplus Y$ coincide con lo spazio H? Caratterizzare in ogni caso l'insieme $(X \oplus Y)^\perp$.

d) Fornire qualche esempio di sottospazi X, Y diversi dal sottospazio nullo e tra loro ortogonali nel caso in cui $H = \ell^2$.

Esercizio 4. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\{f_n\}$ la successione definita per $n \in \mathbb{N}$ da

$$f_n(x) = \frac{(u(x))^n}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Provare che se f_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ a una funzione f, allora necessariamente $|u(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta del 6 luglio 2009

Esercizio 1. Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni misurabili convergente q.o. in $\mathbb{R}$ a una funzione u. Si abbia inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} e^{u_n(x)} dx \leq 5 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

a) Dire se u è misurabile.

b) La successione $\{e^{u_n}\}$ converge q.o.?

c) La funzione e^u è integrabile in $\mathbb{R}$ oppure non possiamo concludere nulla sull'integrabilità di e^u?

Esercizio 2. Se X è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2|y| \leq 1\}$$

provare che X è misurabile secondo Lebesgue e calcolarne la misura, sia essa finita oppure infinita.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio di Hilbert $H = L^2(\mathbb{R})$ e siano $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni misurabili. Posto

$$K = \{u \in H : \quad \varphi \leq u \leq \psi \ \text{ q.o. in } \mathbb{R}\},$$

si chiede di rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

a) L'insieme K potrebbe essere vuoto? Dare condizioni su φ e ψ affinché K sia non vuoto.

b) Sia ora K non vuoto. Si provi che K è un sottoinsieme convesso e chiuso di H.

c) Ricordare il teorema delle proiezioni e, per un elemento generico $w \in H$, definire esplicitamente la proiezione di w su K nel caso in cui $\varphi(x) = -1$ e $\psi(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \arctan(nx)^{-1} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}$, come pure della successione delle derivate in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta del 28 settembre 2009

Esercizio 1. Se X è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$X = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 16\big\} \cap \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4|y| \leq 1\big\}$$

provare che X è misurabile secondo Lebesgue e calcolarne la misura, sia essa finita oppure infinita.

Esercizio 2. Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni di una variable reale, integrabili sull'intervallo $(-1, 1)$ e tali che

$$-e^{-n} \leq \int_{(-1,1)} u_n(x)dx \leq 1/n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

a) Dire se la successione $\{u_n\}$ converge q.o. a una funzione u.

b) Dire se la successione $\{u_n\}$ converge in $L^1(-1, 1)$ ad una funzione u.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio di Hilbert $H = \ell^2$ delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Siano poi $y = (y_1, y_2, \ldots)$ e $z = (z_1, z_2, \ldots)$ due successioni reali fissate e si definisca

$$K = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in H : \quad y_n \leq x_n \leq z_n \ \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Si chiede di rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

a) L'insieme K potrebbe essere vuoto? Dare condizioni su y e z affinché K sia non vuoto.

b) Sia ora K non vuoto. Si provi che K è un sottoinsieme convesso e chiuso di H.

c) Ricordare il teorema delle proiezioni e, per un elemento generico $w = (w_1, w_2, \ldots) \in H$, definire esplicitamente la proiezione di w su K nel caso in cui y e z siano definite da $y_n = -1/n$ e $z_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{in } \mathbb{R}, \text{ dove} \quad f_n(x) = \begin{cases} nx^{-n} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta del 18 gennaio 2010

Esercizio 1. Considerata la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt{n}\, x\left(1-x^2\right)^n, \qquad x \in [0,1], \qquad n \in \mathbb{N},$$

a) studiare la convergenza puntuale della successione;

b) valutare l'applicabilità o meno dei teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale: precisamente, del teorema di Beppo Levi della convergenza monotona e del teorema di Lebesgue della convergenza dominata.

Dire poi che cosa eventualmente cambia (nelle conclusioni di a) e b)) se alla successione $\{f_n\}$ si sostituisce la successione

$$g_n(x) = nx\left(1-x^2\right)^n, \qquad x \in [0,1], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottoinsieme di $L^1(\mathbb{R})$

$$X := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) \ : \ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

a) Provare che X è un sottospazio di $L^1(\mathbb{R})$.

b) X è chiuso oppure denso in $L^1(\mathbb{R})$?

c) Dare un esempio di funzionale $L : X \to \mathbb{R}$ lineare continuo e suriettivo.

d) Posto $\|f\|_+ = \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\,dx$ ove, per $x \in \mathbb{R}$, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, si chiede se $\|\cdot\|_+$ definisce una norma in X oppure no.

Esercizio 3. Sia H uno spazio di Hilbert reale, con prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$, che ammette un sistema ortonormale completo $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Fissato un elemento di $u \in H$ e posto

$$a_n = (\varphi_n, u) \qquad \text{per ogni} \ \ n \in \mathbb{N},$$

si chiede se

a) la successione numerica $\{a_n\}$ ammette limite per $n \to \infty$?

b) la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge?

Esercizio 4. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{in } \mathbb{R}, \ \text{dove} \quad f_n(x) = \begin{cases} n^{100} x^{3n} & \text{se } x > 0 \\ 2^{nx} & \text{se } x \le 0 \end{cases}.$$

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta del 26 febbraio 2010

Esercizio 1. Sia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile tale che $f(x)>0$ per ogni $x>0$ e $\int_{(0,+\infty)} f(x)dx = 5$. Per $\alpha>0$ si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = n\sin\left(n^{-\alpha}f(x)\right), \qquad x\in(0,+\infty), \qquad n\in\mathbb{N}.$$

a) Provare l'integrabilità delle funzioni f_n per ogni $n\in\mathbb{N}$.

b) Calcolare, in dipendenza del parametro reale positivo α, il limite $\lim_{n\to\infty}\int_{(0,+\infty)} f_n(x)dx$ giustificando le risposte date. [*Suggerimento: cominciare dal caso* $\alpha = 1$].

Esercizio 2. Studiare linearità, continuità, norma, iniettività, suriettività o immagine dell'operatore

$$T: L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R}), \qquad T(f)(x) := \max\{0, xe^{-x}\}f(x) \quad \text{per } x\in\mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Nello spazio di Hilbert $X = L^2(-\pi,\pi)$ si consideri il sistema ortonormale completo $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos kx,\ \sin ky;\ \ k\in\mathbb{N},\ k\neq 0\right\}$ rispetto al prodotto scalare definito da $(f,g)_X := \pi^{-1}\int_{(-\pi,\pi)} f(x)g(x)dx$, $f,g\in X$. La funzione $u:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ definita da

$$u(x) = \begin{cases} -x-\pi & \text{se } x\in(-\pi,0) \\ 0 & \text{se } x = -\pi, 0, \pi \\ \pi - x & \text{se } x\in(0,\pi) \end{cases}$$

a) è misurabile? è integrabile? appartiene a X? sta anche in altri spazi $L^p(-\pi,\pi)$?

b) Sviluppare la funzione u in serie di Fourier rispetto al sistema S.

c) Utilizzare il risultato trovato per calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Esercizio 4. Studiare la serie di potenze reale

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)(2x+1)^{3n+1}, \qquad x\in\mathbb{R},$$

e in particolare determinare centro x_0 e raggio di convergenza ρ. Studiare poi il comportamento della serie nei punti $x = x_0\pm\rho$.

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta del 2 luglio 2010

Esercizio 1. Costruire un esempio di operatore lineare e continuo $T : \ell^1 \to \ell^\infty$ tale che la sua norma sia esattamente uguale a 2.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio $H = \mathbb{R}^3$

$$X = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in H : \ \ u_1 \geq 0, \ \ -1 < u_2 \leq 1, \ \ u_3 = 0\}.$$

a) X è un sottospazio di H?

b) X è chiuso in H?

c) Esiste ed è unica la proiezione dell'elemento $(-1, 2, 1)$ su $\overline{X}$? Se la risposta è affermativa, calcolare detta proiezione.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 3$. Per $\alpha > 0$ si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha \arctan \frac{f(x)}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Provare l'integrabilità delle funzioni f_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Calcolare, in dipendenza del parametro reale positivo α, il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$ giustificando le risposte date. [*Suggerimento: cominciare dal caso* $\alpha = 1$].

Esercizio 4. Studiare la serie di potenze reale

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n-3} (3x+2)^{5n+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

e in particolare determinare centro x_0 e raggio di convergenza ρ. Studiare poi il comportamento della serie nei punti $x = x_0 \pm \rho$.

ANALISI C & Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta del 29 settembre 2010

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa tale che $f(-\pi/2) = 2$, $f(0) = 1$ e $f(\pi/2) = \pi$. Calcolare, motivando adeguatamente la risposta data, il

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f\Big(\arctan\frac{n}{x}\Big)dx.$$

Esercizio 2. Sia X l'insieme delle (classi di) funzioni $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ misurabili (e tra loro uguali q.o.) tali che

$$\int_{(0,1)} \frac{1}{x}|f(x)|^2 dx < +\infty.$$

a) X è un sottoinsieme di $L^2(0,1)$? E l'inclusione $L^2(0,1) \subseteq X$ vale oppure no?

b) L'insieme X ha una struttura di spazio vettoriale?

c) Posto

$$\langle f, g\rangle_X = \int_{(0,1)} \frac{1}{x} f(x)g(x)dx \qquad \forall\ f, g \in X,$$

controllare che $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_X$ è un prodotto scalare in X.

d) Dimostrare che X è completo, cioè che X è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare di cui sopra.

e) Provare la validità o meno delle inclusioni $L^\infty(0,1) \subseteq X$ e $X \subseteq L^\infty(0,1)$.

Esercizio 3. Costruire un operatore lineare e continuo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T(1,0) = (2,0,-4)$ e $T(0,1) = (-1,5,0)$. Una volta che avete scritto per bene l'operatore, vi si chiede di calcolarne la norma.

Esercizio 4. Posto

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{-n}}{n-|x|} & \text{se } |x| < n \\[2mm] 0 & \text{se } |x| \geq n \end{cases},$$

discutere la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ in $\mathbb{R}$.

ANALISI C

Prova scritta del 14 dicembre 2010

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, non negativa e integrabile in $\mathbb{R}$. Calcolare, motivando adeguatamente la risposta data, il

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1000)} f(3x+2n)dx.$$

Esercizio 2. Per $g \in L^1(0,+\infty)$ si consideri la successione $y = (y_n)$ definita da

$$y_n = \int_{[(n-1)\pi, n\pi]} g(t) \sin t \, dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Provare che y è ben definita e che $y \in \ell^1$.

b) Sia ora $T : L^1(0,+\infty) \to \ell^1$ l'operatore definito da $Tg = y$: si chiede se T è lineare oppure no.

c) L'operatore T è continuo? Motivare per bene la risposta.

d) (facoltativo) Studiare iniettività e suriettività dell'operatore T.

Esercizio 3. Nello spazio di Hilbert $H = L^2(-1,1)$ si considerino i due sottoinsiemi

$$X = \{a \sin(\pi x) + bx : \ a, b \ \in \mathbb{R}\},$$

$$Y = \left\{u \in H : \ u \text{ è una funzione pari e } \int_{(-1,1)} u(x)dx = 0\right\}.$$

a) X e Y sono ben definiti? risultano sottospazi di H? sono chiusi?

b) Scrivere esplicitamente una funzione $v \in L^2(-1,1)$ diversa dall'elemento nullo di H che appartenga a $X^\perp$, ortogonale di X.

c) Scrivere esplicitamente una funzione $w \in L^2(-1,1)$ diversa dall'elemento nullo di H che appartenga all'ortogonale $Y^\perp$.

d) Sapete dire quale relazione sussiste tra X e $Y^\perp$? e tra Y e $X^\perp$?