

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2002-2003**

*Prova scritta del 31.1.2003*

**Compito A**

**Esercizio 1.** In uno spazio euclideo tridimensionale è fissato un riferimento ortonormale  $Oxyz$ .

1. Scrivere un'equazione cartesiana del piano mediano  $\pi$  del segmento di estremi  $P_1(1, 2, 3)$  e  $P_2(-1, 2, -1)$ .
2. Scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r$  passante per  $P_3(2, -1, 0)$  e  $P_4(3, 2, 2)$ .
3. Scrivere un'equazione della sfera  $S$  di centro nel punto  $P_5 = \pi \cap r$  e tangente al piano  $x + y + z = 2$ .
4. L'intersezione tra  $S$  e  $\pi$  è una circonferenza  $C$ . Dire se il punto  $P_6(4, -1, -1)$  è situato all'interno del cerchio delimitato da  $C$  nel piano  $\pi$ , all'esterno di esso o sulla stessa circonferenza  $C$ .

**Punti (2+1+2+2)**

**Esercizio 2.** Si consideri la seguente matrice  $X_t$  dipendente da un parametro reale  $t$  :

$$X_t = \begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ t & t & -t^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Dire per quali valori del parametro reale  $X_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- b) Calcolare autovalori e autovettori di  $X_1$ .

**Punti (5+5)**

**Esercizio 3.** Siano  $A$  e  $B$  matrici reali di ordine 3 di rango 1 indipendenti:  $A \neq c \cdot B$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

*Vero o Falso :*

- a)  $A - B$  può essere invertibile ;
- b)  $A - B$  ha sempre rango 2;
- c) se  $B$  è diagonalizzabile allora la sua traccia non è nulla;
- d) per qualche costante  $c \in \mathbb{R}$   $A - c \cdot B$  la matrice può avere come autovalore (complesso)  $1 - i$ .

**Punti (2+2+2+2)**

**Esercizio 4.** Si consideri l'applicazione lineare  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che  $F(1, 1, 0) = (2, 0, 2, 0)$ ,  $F(5, 3, 1) = (10, 0, 6, 2)$  e  $F(0, 1, 1) = (0, 0, 2, 2)$ .

- a) Trovare la matrice  $A$  associata ad  $F$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$  ed  $\mathbb{R}^4$ .
- b) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di  $F$ .

**Punti (3+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2002-2003**  
**Seconda prova scritta del 31.1.2003**

**Compito A**

**Esercizio 1.** In uno spazio euclideo tridimensionale è fissato un riferimento ortonormale  $Oxyz$ .

1. Scrivere un'equazione cartesiana del piano mediano  $\pi$  del segmento di estremi  $P_1(1, 2, 3)$  e  $P_2(-1, 2, -1)$ .
2. Scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r$  passante per  $P_3(2, -1, 0)$  e  $P_4(3, 2, 2)$ .
3. Scrivere un'equazione della sfera  $S$  di centro nel punto  $P_5 = \pi \cap r$  e tangente al piano  $x + y + z = 2$ .
4. L'intersezione tra  $S$  e  $\pi$  è una circonferenza  $C$ . Dire se il punto  $P_6(4, -1, -1)$  è situato all'interno del cerchio delimitato da  $C$  nel piano  $\pi$ , all'esterno di esso o sulla stessa circonferenza  $C$ .

**Punti (3+1+3+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri la seguente matrice  $X_t$  dipendente da un parametro reale  $t$  :

$$X_t = \begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ t & t & -t^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Dire per quali valori del parametro reale  $X_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- b) Calcolare autovalori e autovettori di  $X_1$ .

**Punti (6+6)**

**Esercizio 3.** Siano  $A$  e  $B$  matrici reali di ordine 3 di rango 1 indipendenti:  $A \neq c \cdot B$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

*Vero o Falso :*

- a)  $A - B$  può essere invertibile ;
- b)  $A - B$  ha sempre rango 2;
- c) se  $B$  è diagonalizzabile allora la sua traccia non è nulla;
- d) per qualche costante  $c \in \mathbb{R}$   $A - c \cdot B$  la matrice può avere come autovalore (complesso)  $1 - i$ .

**Punti (2+2+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2002-2003**

*Prova scritta del 31.1.2003*

**Compito B**

**Esercizio 1.** In uno spazio euclideo tridimensionale è fissato un riferimento ortonormale  $Oxyz$ .

1. Scrivere un'equazione cartesiana del piano mediano  $\pi$  del segmento di estremi  $P_1(2, 1, 1)$  e  $P_2(4, -3, 1)$ .
2. Scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r$  passante per  $P_3(1, -2, 1)$  e  $P_4(3, 0, 2)$ .
3. Scrivere un'equazione della sfera  $S$  di centro nel punto  $P_5 = \pi \cap r$  e tangente al piano  $x - y - z = 0$ .
4. L'intersezione tra  $S$  e  $\pi$  è una circonferenza  $C$ . Dire se il punto  $P_6(2, -2, 1)$  è situato all'interno del cerchio delimitato da  $C$  nel piano  $\pi$ , all'esterno di esso o sulla stessa circonferenza  $C$ .

**Punti (2+1+2+2)**

**Esercizio 2.** Si consideri la seguente matrice  $X_t$  dipendente da un parametro reale  $t$ :

$$X_t = \begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ t & -t^2 & t \end{pmatrix}.$$

- a) Dire per quali valori del parametro reale  $X_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- b) Calcolare autovalori e autovettori di  $X_1$ .

**Punti (5+5)**

**Esercizio 3.** Siano  $A$  e  $B$  matrici reali di ordine 3 di rango 1 indipendenti:  $A \neq c \cdot B$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .  
*Vero o Falso*:

- a)  $A + B$  può essere invertibile;
- b)  $A + B$  ha sempre rango 2;
- c) se  $A$  è diagonalizzabile allora la sua traccia non è nulla;
- d) per qualche costante  $c \in \mathbb{R}$   $A - c \cdot B$  la matrice può avere come autovalore (complesso)  $1 + i$ .

**Punti (2+2+2+2)**

**Esercizio 4.** Si consideri l'applicazione lineare  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che  $F(1, 1, 0) = (2, 0, 2, 0)$ ,  $F(5, 3, 1) = (10, 0, 6, 2)$  e  $F(0, 1, 1) = (0, 0, 2, 2)$ .

- a) Trovare la matrice  $A$  associata ad  $F$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$  ed  $\mathbb{R}^4$ .
- b) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di  $F$ .

**Punti (3+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2002-2003**  
**Seconda prova scritta del 31.1.2003**

Compito B

**Esercizio 1.** In uno spazio euclideo tridimensionale è fissato un riferimento ortonormale  $Oxyz$ .

1. Scrivere un'equazione cartesiana del piano mediano  $\pi$  del segmento di estremi  $P_1(2, 1, 1)$  e  $P_2(4, -3, 1)$ .
2. Scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r$  passante per  $P_3(1, -2, 1)$  e  $P_4(3, 0, 2)$ .
3. Scrivere un'equazione della sfera  $S$  di centro nel punto  $P_5 = \pi \cap r$  e tangente al piano  $x - y - z = 0$ .
4. L'intersezione tra  $S$  e  $\pi$  è una circonferenza  $C$ . Dire se il punto  $P_6(2, -2, 1)$  è situato all'interno del cerchio delimitato da  $C$  nel piano  $\pi$ , all'esterno di esso o sulla stessa circonferenza  $C$ .

**Punti (3+1+3+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri la seguente matrice  $X_t$  dipendente da un parametro reale  $t$  :

$$X_t = \begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ t & -t^2 & t \end{pmatrix}.$$

- a) Dire per quali valori del parametro reale  $X_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- b) Calcolare autovalori e autovettori di  $X_1$ .

**Punti (6+6)**

**Esercizio 3.** Siano  $A$  e  $B$  matrici reali di ordine 3 di rango 1 indipendenti:  $A \neq c \cdot B$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .  
*Vero o Falso :*

- a)  $A - B$  può essere invertibile ;
- b)  $A - B$  ha sempre rango 2;
- c) se  $A$  è diagonalizzabile allora la sua traccia non è nulla;
- d) per qualche costante  $c \in \mathbb{R}$   $A - c \cdot B$  la matrice può avere come autovalore (complesso)  $1 + i$ .

**Punti (2+2+2+2)**

Corso di Geometria 1 -a. a. 2002-03 Prova scritta 31.1.2003 Risultati

Nome:

Cognome:

Nuovo ordinamento

SI

NO

COMPITO

A

B

prova completa

II prova.

**ESERCIZIO 1**

- a) equazione  $\pi$  :
- b) equazione di  $r$  :
- c)  $S =$
- d) (crocettare) Interno      Esterno  
quad    su  $C$

**ESERCIZIO 2**

- a) valori di  $t$  :  $X_t$  è diagonalizzabile:
- b) autovalori                      autovettori

**ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)**

- a) V            F
- b) V            F
- c) V            F
- d) V            F

**ESERCIZIO 4**

- a)  $A =$                       b)  $\dim Ker =$                        $\dim Im =$

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di 7 punti. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

Chi ha superato lo scritto di novembre può svolgere solo i primi 3 esercizi cioè la parte contenuta nelle pagine 2 per il compito A e 4 per il compito B (la scala dei punti è modificata).

Il compito si ritiene sufficiente se si ottengono 18/30 .