

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-2007**

*Prova scritta del 22.01.2007*

**Compito A**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano  $P, Q$  e  $R$  i punti di coordinate rispettivamente  $(2, 1, 3)$ ,  $(3, 2, 4)$  e  $(-1, 0, 2)$  e  $\pi$  il piano passante per  $R$  la cui giacitura è generata dai vettori  ${}^t(2, 1, 1)$  e  ${}^t(-1, 1, -1)$ .

1. Scrivere un'equazione cartesiana per il piano  $\pi$  e calcolare la distanza tra  $P$  e  $\pi$ ;
2. scrivere un'equazione cartesiana per la sfera  $S$  con centro in  $P$  e passante per  $Q$  e per i piani paralleli a  $\pi$  tangenti a  $S$ ;
3. verificare che il punto  $Q$  appartiene al piano  $\pi$  e scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r$  giacente nel piano  $\pi$ , passante per il punto  $Q$  e parallela al piano  $\pi'$  di equazione  $x - 3y + 2z - 1 = 0$ .  $r$  è secante, tangente o esterna a  $S$ ?

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$F_t(0, 1, 0) = (0, 1, -t^2), F_t(1, 1, 1) = (t, 1 + t^2, -1 + t - t^2), F_t(0, t, 1) = (0, t + t^2, -t^3 - 1).$$

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_1$ .
- d) Calcolare al variare di  $t$  la segnatura di  ${}^tA_t + A_t$ .

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $A$ , una matrice reale di ordine 3, invertibile tale che:

$${}^tA = -A^2 + 2A^{-1}$$

*Vero o Falso:*

1. Il determinante di  ${}^tA$  non è mai nullo.
2. Se  $A$  ha autovalori reali allora è  $A = I$  matrice identica.
3. La traccia di  $A$  può essere 9.

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-200**

*Prova scritta del 22.01.2007*

**Compito B**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano  $P, Q$  e  $R$  i punti di coordinate rispettivamente  $(3, 2, 1)$ ,  $(6, -2, -2)$  e  $(2, -1, 0)$  e  $\pi$  il piano passante per  $R$  la cui giacitura è generata dai vettori  ${}^t(1, -1, -1)$  e  ${}^t(1, 2, 1)$ .

1. Scrivere un'equazione cartesiana per il piano  $\pi$  e calcolare la distanza tra  $P$  e  $\pi$ ;
2. scrivere un'equazione cartesiana per la sfera  $S$  con centro in  $P$  e passante per  $Q$  e per i piani paralleli a  $\pi$  tangenti a  $S$ ;
3. verificare che il punto  $Q$  appartiene al piano  $\pi$  e scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r$  giacente nel piano  $\pi$ , passante per il punto  $Q$  e parallela al piano  $\pi'$  di equazione  $-2x + y + 3z - 8 = 0$ .  $r$  è secante, tangente o esterna a  $S$ ?

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$F_t(0, 0, 1) = (0, t^2, -1), F_t(1, 1, 1) = (t, 1 + t^2, -1 + t - t^2), F_t(1, 0, t) = (t, t^3, 0).$$

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_1$ .
- d) Calcolare al variare di  $t$  la segnatura di  ${}^tA_t + A_t$ .

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $A$ , una matrice reale di ordine 3, invertibile tale che:

$${}^tA = -A^2 + 2A^{-1}$$

*Vero o Falso:*

1. Il rango di  ${}^tA$  può essere 2.
2. Se  $A$  ha autovalori reali allora è  $A = I$  matrice identica.
3. La traccia di  $A$  può essere 10.

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-2007**

*Prova scritta del 22.01.2007*

**Compito C**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano  $P, Q$  e  $R$  i punti di coordinate rispettivamente  $(1, 2, 3)$ ,  $(3, 1, 8)$  e  $(0, 2, -1)$  e  $\pi$  il piano passante per  $R$  la cui giacitura è generata dai vettori  ${}^t(2, 1, 1)$  e  ${}^t(-1, -1, 1)$ .

1. Scrivere un'equazione cartesiana per il piano  $\pi$  e calcolare la distanza tra  $P$  e  $\pi$ ;
2. scrivere un'equazione cartesiana per la sfera  $S$  con centro in  $P$  e passante per  $Q$  e per i piani paralleli a  $\pi$  tangenti a  $S$ ;
3. verificare che il punto  $Q$  appartiene al piano  $\pi$  e scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r$  giacente nel piano  $\pi$ , passante per il punto  $Q$  e parallela al piano  $\pi'$  di equazione  $3x - 2y - z + 2 = 0$ .  $r$  è secante, tangente o esterna a  $S$ ?

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$F_t(1, 0, 0) = (t, 0, t), F_t(1, 1, 0) = (t, 1, -t^2 + t), F_t(t, 0, 1) = (t^2, t^2, t^2 - 1).$$

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_1$ .
- d) Calcolare al variare di  $t$  la segnatura di  ${}^tA_t + A_t$ .

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $A$ , una matrice reale di ordine 3, invertibile tale che:

$${}^tA = -A^2 + 2A^{-1}$$

*Vero o Falso:*

1. Il rango  ${}^tA$  deve essere 3.
2. Se  $A$  ha autovalori reali allora è  $A = I$  matrice identica.
3. La traccia di  $A$  può essere 11.

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-2007**

*Prova scritta del 22.1.2007* Risultati

Nome: \_\_\_\_\_ Cognome: \_\_\_\_\_ Data nascita: \_\_\_\_\_  
Anno di corso: \_\_\_\_\_ Mat. \_\_\_\_\_ Fis. \_\_\_\_\_ (crocettare)  
Programma (per studenti di matematica anni precedenti) **Nuovo** **Precedente**

**Compito**      **A**      **B**      **(crocettare)**

**ESERCIZIO 1**

- 1)
- 2)
- 3)

**ESERCIZIO 2**

- a)
- b)
- c)
- d)

**ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)**

- 1) V      F
- 2) V      F
- 3) V      F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t^2 \\ t & -t^2 & -1 \end{pmatrix}$$