

Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-2007

Prova scritta intermedia del 23.11.2006

Compito A

Esercizio 1. Determinare per quali valori dei parametri reali a e b il seguente sistema lineare risulta compatibile e trovarne le soluzioni :

$$\begin{cases} x + y + z = 2a \\ ax + ay + az = 2b \\ x - y + bz = 0 \\ bx + by - z = 0 \\ -bx + a^2y - bz = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Siano dati i seguenti vettori in \mathbb{R}^4 : $v_1 = {}^t(1, 2, -1, 1)$, $v_2 = {}^t(2, 1, 1, 0)$, $v_3 = {}^t(0, 6, -9, 4)$, $v_4 = {}^t(2, -1, 0, 0)$ e $v_5 = {}^t(1, -1, 3, 1)$.

1. Estrarre dai v_i una base \mathcal{B} dello spazio V generato in \mathbb{R}^4 da v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 .
2. Sia $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $f(e_1) = v_1, f(e_2) = v_2, f(e_3) = v_3, f(e_4) = v_4$ e $f(e_5) = v_5$, dove gli e_i costituiscono la base canonica di \mathbb{R}^5 ; qual è la dimensione di $\ker(f)$?
3. Si verifichi che il vettore $w = {}^t(1, -1, 4, 1)$ appartiene a V e se ne determinino le coordinate nella base \mathcal{B} trovata in precedenza.

Esercizio 3. Sia A una matrice 3×3 di reale tale che A^3 abbia rango 1.

Vero o Falso:

- a) $\det(A + A^2) = 0$.
- b) A ha sempre rango 1.
- c) A^2 ha sempre rango 1.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-2007

Prova scritta intermedia del 23.11.2006

Compito B

Esercizio 1. Determinare per quali valori dei parametri reali a e b il seguente sistema lineare risulta compatibile e trovarne le soluzioni :

$$\begin{cases} x + y + z = 2b \\ bx + by + bz = 2a \\ x - y + az = 0 \\ ax + ay - z = 0 \\ -ax + b^2y - az = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Siano dati i seguenti vettori in \mathbb{R}^4 : $v_1 = {}^t(0, 0, -2, -1)$, $v_2 = {}^t(1, 0, 2, 1)$, $v_3 = {}^t(-1, -1, 1, 2)$, $v_4 = {}^t(3, 1, 1, -1)$ e $v_5 = {}^t(-9, -4, 0, 6)$.

1. Estrarre dai v_i una base \mathcal{B} dello spazio V generato in \mathbb{R}^4 da v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 .
2. Sia $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $f(e_1) = v_1, f(e_2) = v_2, f(e_3) = v_3, f(e_4) = v_4$ e $f(e_5) = v_5$, dove gli e_i costituiscono la base canonica di \mathbb{R}^5 ; qual è la dimensione di $\ker(f)$?
3. Si verifichi che il vettore $w = {}^t(4, 1, 1, -1)$ appartiene a V e se ne determinino le coordinate nella base \mathcal{B} trovata in precedenza.

Esercizio 3. Sia A una matrice 3×3 di reale tale che A^3 abbia rango 1.

Vero o Falso:

- a) $\det(-A + A^2) = 0$.
- b) $A + A^3$ ha sempre rango 1.
- c) A^2 può avere rango 2.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-2007

Prova scritta intermedia del 23.11.2006

Compito C

Esercizio 1. Determinare per quali valori dei parametri reali a e b il seguente sistema lineare risulta compatibile e trovarne le soluzioni :

$$\begin{cases} x + y + z = -2a \\ ax + ay + az = -2b \\ x - y + bz = 0 \\ bx + by - z = 0 \\ -bx + a^2y - bz = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Siano dati i seguenti vettori in \mathbb{R}^4 : $v_1 = {}^t(4, 8, -1, 3)$, $v_2 = {}^t(3, 0, 2, 1)$, $v_3 = {}^t(-1, -2, 1, 2)$, $v_4 = {}^t(2, 2, 1, 0)$ e $v_5 = {}^t(-2, 0, 0, 1)$.

1. Estrarre dai v_i una base \mathcal{B} dello spazio V generato in \mathbb{R}^4 da v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 .
2. Sia $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $f(e_1) = v_1, f(e_2) = v_2, f(e_3) = v_3, f(e_4) = v_4$ e $f(e_5) = v_5$, dove gli e_i costituiscono la base canonica di \mathbb{R}^5 ; qual è la dimensione di $\ker(f)$?
3. Si verifichi che il vettore $w = {}^t(1, -8, 4, 8)$ appartiene a V e se ne determinino le coordinate nella base \mathcal{B} trovata in precedenza.

Esercizio 3. Sia A una matrice 3×3 di reale tale che $-A^3$ abbia rango 1.

Vero o Falso:

- a) $\det(A - A^2) = 0$.
- b) $-A$ ha sempre rango 2.
- c) A^2 ha sempre rango 1.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-2007

Prova scritta intermedia del 23.11.2006

Compito D

Esercizio 1. Determinare per quali valori dei parametri reali a e b il seguente sistema lineare risulta compatibile e trovarne le soluzioni :

$$\begin{cases} x + y + z = 4a \\ ax + ay + az = 4b \\ x - y + bz = 0 \\ bx + by - z = 0 \\ -bx + a^2y - bz = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Siano dati i seguenti vettori in \mathbb{R}^4 : $v_1 = {}^t(1, 2, -1, -2)$, $v_2 = {}^t(2, 1, 3, 0)$, $v_3 = {}^t(0, 1, -2, 0)$, $v_4 = {}^t(-1, -3, 4, 8)$ e $v_5 = {}^t(1, 0, 2, 2)$.

1. Estrarre dai v_i una base \mathcal{B} dello spazio V generato in \mathbb{R}^4 da v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 .
2. Sia $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $f(e_1) = v_1, f(e_2) = v_2, f(e_3) = v_3, f(e_4) = v_4$ e $f(e_5) = v_5$, dove gli e_i costituiscono la base canonica di \mathbb{R}^5 ; qual è la dimensione di $\ker(f)$?
3. Si verifichi che il vettore $w = {}^t(4, 8, 1, -8)$ appartiene a V e se ne determinino le coordinate nella base \mathcal{B} trovata in precedenza.

Esercizio 3. Sia A una matrice 3×3 di reale tale che A^3 abbia rango 1.

Vero o Falso:

- a) $\det(3A + A^2) = 0$.
- b) A può avere rango 2.
- c) A^2 ha sempre rango 1.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-2007
Prova scritta intermedia del 23.11.2006 Risultati

Nome: _____ Cognome: _____ Anno di immatric. _____

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

- a) valori per cui il sistema è risolubile
- b) soluzioni

ESERCIZIO 2

- a)
- b)
- c)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

- a) V F
- b) V F
- c) V F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

Ogni esercizio esatto vale 1 punto.