

Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008

Prova scritta del 23.06.2008

Compito A

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 2z - 14 = 0$, r_1 la retta di equazioni

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 4 \\ y + 2z = -2 \end{cases},$$

P_1 e P_2 i punti di coordinate $(2, 2, -1)$ e $(3, -2, 0)$ e Q_1, Q_2, Q_3 i punti di coordinate $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ e $(0, 2, 1)$.

1. Determinare equazioni cartesiane per la retta r_2 passante per P_1 e P_2 e per il piano π_1 passante per Q_1, Q_2 e Q_3 ;
2. scrivere equazioni parametriche per la retta r_1 e determinare la posizione relativa di r_1 e π_1 e quella di π_1 e S ;
3. scrivere l'equazione del fascio di piani paralleli simultaneamente alle rette r_1 e a r_2 e individuare tra essi il piano π_2 equidistante da r_1 e r_2 .

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$,

$$F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tale che:

$$F_t(0, 1, 1) = (2, 2, t), F_t(1, 1, 0) = (6 + t, t + 1, 0), F_t(0, 0, 5) = (5, 5, 5t),$$

- a) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 .
- b) Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di A_0 .
- d) Calcolare la segnatura di $A_1 + A_1, I$ matrice identità.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Sia M lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 3. Date $A \in M$ e $B \in M$ matrici non nulle.

Vero o Falso:

1. Se A e B sono simmetriche definite positive allora $A + B$ è definita positiva.
2. Se A e B sono antisimmetriche allora AB è diagonalizzabile;
3. Se A , è nilpotente, B è diagonalizzabile e $AB = BA$ allora $A - B$ non mai è diagonalizzabile.

Punti (2+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008

Prova scritta del 23.06.2008

Compito B

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 6z - 14 = 0$, r_1 la retta di equazioni

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 4 \\ 2y + z = -2 \end{cases},$$

P_1 e P_2 i punti di coordinate $(2, -1, 2)$ e $(3, 0, -2)$ e Q_1, Q_2, Q_3 i punti di coordinate $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ e $(0, 1, 2)$.

1. Determinare equazioni cartesiane per la retta r_2 passante per P_1 e P_2 e per il piano π_1 passante per Q_1, Q_2 e Q_3 ;
2. scrivere equazioni parametriche per la retta r_1 e determinare la posizione relativa di r_1 e π_1 e quella di π_1 e S ;
3. scrivere l'equazione del fascio di piani paralleli simultaneamente alle rette r_1 e a r_2 e individuare tra essi il piano π_2 equidistante da r_1 e r_2 .

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$,

$$F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tale che:

$$F_t(0, 1, -1) = (0, 0, -t), F_t(1, 1, 0) = (6 + t, t + 1, 0), F_t(0, 0, 4) = (4, 4, 4t).$$

- a) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 .
- b) Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di A_0 .
- d) Calcolare la segnatura di $A_1 + A_1, I$ matrice identità.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Sia M lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 3. Date $A \in M$ e $B \in M$ non nulle

Vero o Falso:

1. Se A e B sono simmetriche definite negative allora $A + B$ è definita negativa.
2. Se A e B sono antisimmetriche allora AB non è mai ortogonale.
3. Se A , è nilpotente, B è simmetrica e $AB = BA$ allora $A - B$ non mai è diagonalizzabile.

Punti (2+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008

Prova scritta del 23.6.2008 Risultati

Nome: _____ Cognome: _____ Data nascita: _____
Anno di corso: _____ Mat. _____ Fis. _____ (crocettare)
Programma (per studenti di matematica anni precedenti) **Nuovo** **Precedente**
Compito **A** **B** (crocettare)

ESERCIZIO 1

- 1)
- 2)
- 3)

ESERCIZIO 2

- a)
- b)
- c)
- d)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

1. V F
2. V F
3. V F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} 5 + t & 1 & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$