

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008**

*Prova scritta del 29.01.2008*

**Compito A**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre  $P_1, Q_1$  e  $Q_2$  i punti di coordinate rispettivamente  $(1, 0, 2), (-1, 2, 1)$  e  $(-1, 1, 2)$ .

1. Scrivere equazioni cartesiane per la sfera  $S_1$  con centro in  $Q_1$  e passante per  $P_1$ , per la retta  $r$  passante per  $P_1$  e  $Q_1$  e per il piano  $\pi$  passante per  $P_1, Q_1$  e  $Q_2$ ;
2. trovare un vettore che generi la giacitura della retta  $r$  e scrivere equazioni cartesiane per i due piani  $\pi_2, \pi_3$  ortogonali a  $\pi$  e tangenti a  $S_1$ ;
3. trovare le coordinate dei punti  $P_2$  e  $P_3$  più vicini a  $Q_2$  e appartenenti rispettivamente a  $\pi_2$  e a  $\pi_3$  ed equazioni cartesiane per le sfere  $S_2$  e  $S_3$  con centro in  $Q_2$  e tangenti rispettivamente a  $\pi_2$  e  $\pi_3$

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che

$$F_t(0, 1, 0, 0) = (3, 3, 2, 2), F_t(1, t, 1, 1) = (7 + 4t, 7 + 4t, 8 + 3t, 8 + 3t), F_t(1, 1, -1, 0) = (4, 4, 1, 1), F_t(0, 1, 0, 1) = (5 + t, 5 + t, 5 + t, 5 + t).$$

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_1$ .
- d) Calcolare la segnatura di  $A_0 + A_0 - 5I$ ,  $I$  matrice identità.

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $S$  lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali di ordine 2. Date  $A \in S$  e  $B \in S$  diremo che  $A > B$  se  $A - B$  è matrice definita positiva.

*Vero o Falso:*

1. Se  $A > B$  e  $C > D$  allora  $A + C > B + D$ .
2. Se  $\text{traccia}A > \text{traccia}B$  e  $\det A > \det B$  allora  $A > B$ .
3. Se  $A > B > 0$  allora  $B^{-1} > A^{-1}$ .

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008**

*Prova scritta del 29.01.2008*

**Compito B**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre  $P_1, Q_1$  e  $Q_2$  i punti di coordinate rispettivamente  $(2, 1, 2)$ ,  $(0, 3, 1)$  e  $(0, 2, 2)$ .

1. Scrivere equazioni cartesiane per la sfera  $S_1$  con centro in  $Q_1$  e passante per  $P_1$ , per la retta  $r$  passante per  $P_1$  e  $Q_1$  e per il piano  $\pi$  passante per  $P_1, Q_1$  e  $Q_2$ ;
2. trovare un vettore che generi la giacitura della retta  $r$  e scrivere equazioni cartesiane per i due piani  $\pi_2, \pi_3$  ortogonali a  $\pi$  e tangenti a  $S_1$ ;
3. trovare le coordinate dei punti  $P_2$  e  $P_3$  più vicini a  $Q_2$  e appartenenti rispettivamente a  $\pi_2$  e a  $\pi_3$  ed equazioni cartesiane per le sfere  $S_2$  e  $S_3$  con centro in  $Q_2$  e tangenti rispettivamente a  $\pi_2$  e  $\pi_3$

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che

$$F_t(1, 0, 0, 0) = (3, 3, 2, 2), F_t(t, 1, 1, 1) = (7 + 4t, 7 + 4t, 8 + 3t, 8 + 3t), F_t(1, 1, -1, 0) = (4, 4, 1, 1), F_t(1, 0, 0, 1) = (5 + t, 5 + t, 5 + t, 5 + t).$$

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_1$ .
- d) Calcolare la segnatura di  $A_0 + A_0 - 8I$ ,  $I$  matrice identità.

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $S$  lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali di ordine 2. Date  $A \in S$  e  $B \in S$  diremo che  $A > B$  se  $A - B$  è matrice definita positiva.

*Vero o Falso:*

1. Se  $A > B$  e  $C > B$  allora  $A + C > 2B$ .
2. Se  $A > B > 0$  allora  $\text{traccia}A^2 > \text{traccia}B^2$ .
3. Se  $A > B > 0$  allora  $B^{-1} > A^{-1}$ .

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008**

*Prova scritta del 29.01.2008*

Compito C

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre  $P_1, Q_1$  e  $Q_2$  i punti di coordinate rispettivamente  $(1, 1, 3), (-1, 3, 2)$  e  $(-1, 2, 3)$ .

1. Scrivere equazioni cartesiane per la sfera  $S_1$  con centro in  $Q_1$  e passante per  $P_1$ , per la retta  $r$  passante per  $P_1$  e  $Q_1$  e per il piano  $\pi$  passante per  $P_1, Q_1$  e  $Q_2$ ;
2. trovare un vettore che generi la giacitura della retta  $r$  e scrivere equazioni cartesiane per i due piani  $\pi_2, \pi_3$  ortogonali a  $\pi$  e tangenti a  $S_1$ ;
3. trovare le coordinate dei punti  $P_2$  e  $P_3$  più vicini a  $Q_2$  e appartenenti rispettivamente a  $\pi_2$  e a  $\pi_3$  ed equazioni cartesiane per le sfere  $S_2$  e  $S_3$  con centro in  $Q_2$  e tangenti rispettivamente a  $\pi_2$  e  $\pi_3$

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che

$$F_t(0, 0, 1, 0) = (2, 2, 3, 3), F_t(1, 1, t, 1) = (8 + 3t, 8 + 3t, 7 + 4t, 7 + 4t), F_t(1, -1, -1, 0) = (-2, -2, -3, -3), F_t(0, 0, -1, 1) = (t, t, t, t).$$

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_1$ .
- d) Calcolare la segnatura di  $A_0 + A_0 - 3I$ ,  $I$  matrice identità.

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $S$  lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali di ordine 2. Date  $A \in S$  e  $B \in S$  diremo che  $A > B$  se  $A - B$  è matrice definita positiva.

*Vero o Falso:*

1. Se  $A > B$  allora  $A^2 > B^2$ .
2. Se  $A > -B$  allora  $\text{traccia}A + \text{traccia}B$  può essere negativa .
3. Se  $A > B > 0$  allora  $B^{-1} > A^{-1}$ .

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008**

*Prova scritta del 29.01.2008*

**Compito D**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre  $P_1, Q_1$  e  $Q_2$  i punti di coordinate rispettivamente  $(0, 1, 1)$ ,  $(-2, 3, 0)$  e  $(-2, 2, 1)$ .

1. Scrivere equazioni cartesiane per la sfera  $S_1$  con centro in  $Q_1$  e passante per  $P_1$ , per la retta  $r$  passante per  $P_1$  e  $Q_1$  e per il piano  $\pi$  passante per  $P_1, Q_1$  e  $Q_2$ ;
2. trovare un vettore che generi la giacitura della retta  $r$  e scrivere equazioni cartesiane per i due piani  $\pi_2, \pi_3$  ortogonali a  $\pi$  e tangenti a  $S_1$ ;
3. trovare le coordinate dei punti  $P_2$  e  $P_3$  più vicini a  $Q_2$  e appartenenti rispettivamente a  $\pi_2$  e a  $\pi_3$  ed equazioni cartesiane per le sfere  $S_2$  e  $S_3$  con centro in  $Q_2$  e tangenti rispettivamente a  $\pi_2$  e  $\pi_3$

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che

$$F_t(0, 0, 0, 1) = (2+t, 2+t, 3+t, 3+t), F_t(1, t, 1, 1) = (7+4t, 7+4t, 8+3t, 8+3t), F_t(0, 1, 0, 2) = (7+2t, 7+2t, 8+2t, 8+2t), F_t(0, 1, 1, 1) = (7+t, 7+t, 8+t, 8+t).$$

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_1$ .
- d) Calcolare la segnatura di  $A_0 + A_0 - 2I$ ,  $I$  matrice identità.

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $S$  lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali di ordine 2. Date  $A \in S$  e  $B \in S$  diremo che  $A > B$  se  $A - B$  è matrice definita positiva.

*Vero o Falso:*

1. Se  $A > B$  e  $C > D$  allora  $2A - D > 2B - C$ .
2. Se  $A > B$  allora  $\det A > \det B$ .
3. Se  $A > B > 0$  allora  $B^{-1} > A^{-1}$ .

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008**

*Prova scritta del 29.1.2008* Risultati

Nome: \_\_\_\_\_ Cognome: \_\_\_\_\_ Data nascita: \_\_\_\_\_  
Anno di corso: \_\_\_\_\_ Mat. \_\_\_\_\_ Fis. \_\_\_\_\_ (crocettare)  
Programma (per studenti di matematica anni precedenti) **Nuovo** **Precedente**

**Compito**      **A**      **B**      **C**      **D**      (crocettare)

**ESERCIZIO 1**

- 1)
- 2)
- 3)

**ESERCIZIO 2**

- a)
- b)
- c)
- d)

**ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)**

- 1) V      F
- 2) V      F
- 3) V      F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 + t \\ 3 & 3 & 2 & 2 + t \\ 2 & 2 & 3 & 3 + t \\ 2 & 2 & 3 & 3 + t \end{pmatrix}$$