Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009
Prova scritta del 22.01.2009

Compito **A**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre P_1, P_2 e Q i punti di coordinate rispettivamente $(-1, 2, 0), (3, 1, -1)$ e $(7, 0, -2)$; infine, poniamo $v =^t (-3, 0, 1)$ e $w =^t (2, 1, -2)$.

a) Scrivere equazioni cartesiane per la sfera S_1 con centro in P_1 e raggio 4, per la retta r_1 passante per P_1 e P_2 e per la retta r_2 passante per P_2 e avente giacitura generata da v;

b) determinare la posizione relativa di r_2 e S_1 e trovare un'equazione cartesiana per il piano π ortogonale a w passante per Q;

c) trovare un'equazione cartesiana per la retta r_3 passante per P_2 e ortogonale a π e per la sfera S_2 di raggio minimo che passi per P_2 e sia tangente a π.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F_t(1, 1, 0) = (-2t^2+4, 1-2t, 0)$, $F_t(t, 0, 1) = (0, 2t, 0)$, $F_t(1, 3, 0) = (-6t^2+12, 1-6t, 0)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_2.
4. Dire per quali valori del parametro t, ${}^tA_t + A_t + 3tI$, è definita positiva (I matrice identità).

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Siano A B una matrici reali quadrate di ordine 3, A e $A^3 = 8I$ e B matrice ortogonale. *Vero o Falso*:

1. AB è invertibile.
2. Se A è simmetrica allora $A = 2I$.
3. Se A è normale allora $A + B$ è invertibile.

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009
Prova scritta del 22.01.2009

Compito **B**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre P_1, P_2 e Q i punti di coordinate rispettivamente $(1,0,2), (-3,-1,1)$ e $(-7,-2,0)$; infine, poniamo $v =^t (3,1,0)$ e $w =^t (-2,-2,1)$.

a) Scrivere equazioni cartesiane per la sfera S_1 con centro in P_1 e raggio 5, per la retta r_1 passante per P_1 e P_2 e per la retta r_2 passante per P_2 e avente giacitura generata da v;

b) determinare la posizione relativa di r_2 e S_1 e trovare un'equazione cartesiana per il piano π ortogonale a w passante per Q;

c) trovare un'equazione cartesiana per la retta r_3 passante per P_2 e ortogonale a π e per la sfera S_2 di raggio minimo che passi per P_2 e sia tangente a π.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F_t(1,1,0) = (-2t^2+4, 1-2t, 0)$, $F_t(t,0,1) = (0,3t,0)$, $F_t(1,3,0) = (-6t^2+12, 1-6t, 0)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.

c) Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.

d) Calcolare autovalori e autovettori di A_2.

e) Dire per quali valori del parametro t, ${}^tA_t + A_t + 3tI$, è definita positiva (I matrice identità).

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Siano A B una matrici reali quadrate di ordine 3, A e $A^3 = -8I$ e B matrice ortogonale. *Vero o Falso*:

1. BA è invertibile.
2. Se A è simmetrica allora $A = -2I$.
3. Se A è normale allora $A + B$ è invertibile.

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009
Prova scritta del 22.01.2009

Compito **C**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre P_1, P_2 e Q i punti di coordinate rispettivamente $(-2,0,-1), (-1,-1,3)$ e $(0,-2,7)$; infine, poniamo $v =^t (0,1,-3)$ e $w =^t (-1,-2,2)$.

a) Scrivere equazioni cartesiane per la sfera S_1 con centro in P_1 e raggio 6, per la retta r_1 passante per P_1 e P_2 e per la retta r_2 passante per P_2 e avente giacitura generata da v;

b) determinare la posizione relativa di r_2 e S_1 e trovare un'equazione cartesiana per il piano π ortogonale a w passante per Q;

c) trovare un'equazione cartesiana per la retta r_3 passante per P_2 e ortogonale a π e per la sfera S_2 di raggio minimo che passi per P_2 e sia tangente a π.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F_t(1,1,0) = (-2t^2+4, 1-2t, 0)$, $F_t(t,0,1) = (0,4t,0)$, $F_t(1,3,0) = (-6t^2+12, 1-6t, 0)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_2.
4. Dire per quali valori del parametro t, ${}^tA_t + A_t + 3tI$, è definita positiva (I matrice identità).

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Siano A B una matrici reali quadrate di ordine 3, A e $A^3 = 27I$ e B matrice ortogonale. *Vero o Falso*:

1. BAB è invertibile.
2. Se A è simmetrica allora $A = 3I$.
3. Se A è normale allora $A + B$ è invertibile.

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009
Prova scritta del 22.01.2009

Compito **D**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre P_1, P_2 e Q i punti di coordinate rispettivamente $(0,-2,1),(-1,-1,-3)$ e $(-2,0,-7)$; infine, poniamo $v =^t (1,0,3)$ e $w =^t (-2,-1,-2)$.

a) Scrivere equazioni cartesiane per la sfera S_1 con centro in P_1 e raggio 7, per la retta r_1 passante per P_1 e P_2 e per la retta r_2 passante per P_2 e avente giacitura generata da v;

b) determinare la posizione relativa di r_2 e S_1 e trovare un'equazione cartesiana per il piano π ortogonale a w passante per Q;

c) trovare un'equazione cartesiana per la retta r_3 passante per P_2 e ortogonale a π e per la sfera S_2 di raggio minimo che passi per P_2 e sia tangente a π.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F_t(1,1,0) = (-2t^2+4, 1-2t, 0)$, $F_t(t,0,1) = (0,5t,0)$, $F_t(1,3,0) = (-6t^2+12, 1-6t, 0)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_2.
4. Dire per quali valori del parametro t, ${}^tA_t + A_t + 3tI$, è definita positiva (I matrice identità).

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Siano A B una matrici reali quadrate di ordine 3, A e $A^3 = -27I$ e B matrice ortogonale. *Vero o Falso*:

1. ABA è invertibile.
2. Se A è simmetrica allora $A = -3I$.
3. Se A è normale allora $A + B$ è invertibile.

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009
Prova scritta del 22.01.2009 Risultati

Nome: Cognome: Data nascita:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

1)

2)

3)

ESERCIZIO 2

1.

2.

3.

4.

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

1) V F

2) V F

3) V F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

La matrice del compito A è

$$\begin{pmatrix} 0 & -2t^2+4 & 0 \\ 1 & -2t & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice del compito B è

$$\begin{pmatrix} 0 & -2t^2+4 & 0 \\ 1 & -2t & 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice del compito B è

$$\begin{pmatrix} 0 & -2t^2+4 & 0 \\ 1 & -2t & 3t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice del compito D è

$$\begin{pmatrix} 0 & -2t^2+4 & 0 \\ 1 & -2t & 4t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalizzabile per $\{t : -2 < t < 2\}$.

${}^tA_t + A_t + 3tI$, non è mai definita positiva: il determinante del minore a_{22} e a_{33} hanno segni opposti.

Esercizio 3

1. Se $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ e $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$. etc.
2. Se A è simmetrica ha solo autovalori reali ed è diagonalizzabile allora A è simile a kI quindi $A = kI$.
3. Se A è normale e $A^3 = k^3 I$ a $k \neq 0$, $U = k^{-1}A$ è unitaria perchè tutti i sui autovalori hanno norma 1; quindi se k è reale U è ortogonale e

$$A = kU.$$

Ora $A - B = A(I - A^{-1}B)$ allora $A^{-1}B = k^{-1}U^{-1}B$, ma allora $U^{-1}B$ è ortogonale. Quindi tutti gli autovalori di $U^{-1}B$ hanno norma 1, allora gli autovalori di

$$A^{-1}B = k^{-1}U^{-1}B$$

hanno norma uguale a $|k^{-1}|$. Se $|k| \neq 1$ abbiamo $\det(I - A^{-1}B) \neq 0$ e allora

$$\det(A - B) = \det(A)\det(I - A^{-1}B) \neq 0.$$

Dimostrazione più diretta se: $(A + B)(v) = 0$ con $Av = kUv = -Bv$, allora

$$||v|| = || - Bv|| = ||Av|| = |k| \cdot ||v||$$

quindi

$$(|k| - 1)||v|| = 0$$

quindi se $(|k| - 1) \neq 0$ deve essere $v = 0$, ovvero $ker(A + B) = \{0\}$.