**Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015**
*Prova scritta del 15.06.2015*

Compito **A**

**Esercizio 1.** Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso $P$ e $Q$ i punti di coordinate rispettivamente $(1,0,2)$ e $(-3,2,-2)$, $A$, $B$ e $C$ i punti di coordinate rispettivamente $(1,1,2)$, $(-1,0,-3)$ e $(3,-1,-2)$ e $v$ il vettore ${}^t(1,3,-1)$.

a) Scrivere equazioni cartesiane per la retta $r$ passante per $P$ e avente giacitura generata da $v$, per il piano $\pi$ passante per $A$, $B$ e $C$ e per la sfera $S$ con centro nel punto $P$ e passante per $Q$;

b) determinare le posizioni relative di $r$ e $S$, di $r$ e $\pi$, di $\pi$ e $S$;

c) sia $\mathcal{T}$ l'insieme dei punti $T$ tali che simultaneamente $T-A$ sia ortogonale a $T-B$ e $T-P$ sia ortogonale a $T-Q$. Dimostrare che se $\mathcal{T}$ contiene più di un punto, è una circonferenza.

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(2,1,-t) = (2-2t-2t^2, 3+4t+t^2, -t)$, $F_t(1,2,2) = (1,2,2)$, $F_t(1,2,0) = (1-4t, 6+2t, 0)$.

1. Trovare la matrice $A_t$ associata ad $F_t$ nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale $t$, $A_t$ è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di $A_0$.
4. Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

**Punti (4+5+3+4)**

**Esercizio 3.** Siano $A$ e $B$ due matrici simmetriche reali di ordine 3 con $B$ anche ortogonale *Vero o Falso*:

1. Se $A + B$ è sempre diagonalizzabile sui complessi.
2. $A - iB$ è sempre diagonalizzabile sui complessi.
3. $BAB$ è sempre diagonalizzabile sui reali.

**Punti (1+1+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015**
*Prova scritta del 15.06.2015*

Compito **B**

**Esercizio 1.** Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso $P$ e $Q$ i punti di coordinate rispettivamente $(2, 1, 0)$ e $(3, -1, 2)$, $A$, $B$ e $C$ i punti di coordinate rispettivamente $(2, 1, 1)$, $(-3, -1, 0)$ e $(-2, 3, -1)$ e $v$ il vettore ${}^t(-1, 1, 3)$.

a) Scrivere equazioni cartesiane per la retta $r$ passante per $P$ e avente giacitura generata da $v$, per il piano $\pi$ passante per $A$, $B$ e $C$ e per la sfera $S$ con centro nel punto $P$ e passante per $Q$;

b) determinare le posizioni relative di $r$ e $S$, di $r$ e $\pi$, di $\pi$ e $S$;

c) sia $\mathcal{T}$ l'insieme dei punti $T$ tali che simultaneamente $T - A$ sia ortogonale a $T - B$ e $T - P$ sia ortogonale a $T - Q$. Dimostrare che se $\mathcal{T}$ contiene più di un punto, è una circonferenza.

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(2, 1, t) = (2 + 2t - 2t^2, 3 - 4t + t^2, t)$, $F_t(1, 2, 2) = (1, 2, 2)$, $F_t(1, 2, 0) = (1 + 4t, 6 - 2t, 0)$.

1. Trovare la matrice $A_t$ associata ad $F_t$ nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale $t$, $A_t$ è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di $A_0$.
4. Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

**Punti (4+5+3+4)**

**Esercizio 3.** Siano $A$ e $B$ due matrici simmetriche reali di ordine 3 con $B$ anche ortogonale *Vero o Falso*:

1. Se $A + B$ è sempre diagonalizzabile sui reali.
2. $A + iB$ è sempre diagonalizzabile sui complessi.
3. $BAB$ è sempre diagonalizzabile sui complessi.

**Punti (1+1+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2014**
*Prova scritta del 15.06.2015* Risultati

Nome: Cognome: Matricola:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** (crocettare)

**ESERCIZIO 1**

a)

b)

c)

**ESERCIZIO 2**

1.

2.

3.

4.

**ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)**

1. V F
2. V F
3. V F

- La mancata restituzione o compilazione del modulo comporta l'esclusione dall'esame.
- L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente.
- Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo.
- Il foglio del testo degli esercizi **NON** deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t \\ -2t & 3 & -2+t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$