8 Polinomi di Taylor-MacLaurin

1. Scrivere i polinomi MacLaurin di ordine 0, 1 e 2 di una generica funzione f (derivabile 2 volte).

2. Scrivere i polinomi Taylor di ordine 0, 1 e 2 di $f(x) = x^2$, centrati in $x_0 = 1$.

3. Nei due esercizi precedenti, è vero che $T_1(x)$ è dato da $T_2(x)$ meno il termine di grado $= 2$?

4. Date f, g (derivabili 2 volte), scrivere il polinomio di MacLaurin di $h = fg$ in $x_0 = 0$ all'ordine 2. Utilizzare due metodi:

   (a) calcolare direttamente il polinomio di h;

   (b) calcolare i polinomi di f e g e farne il prodotto;

   (c) verificare l'equivalenza dei due metodi.

5. Ripetere l'ultimo esercizio per il polinomio di Taylor, in $x_0 \neq 0$.

6. Sviluppare $f(x) = x \log x$, in $x_0 = 1$ all'ordine 2.

7. Sviluppare
$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{xe^x}, \quad \text{in} \quad x_0 = 0 \quad \text{all'ordine 2.}$$

Soluzioni

1. Scrivere i polinomi MacLaurin di ordine 0, 1 e 2 di una generica funzione f (derivabile 2 volte).

$$\begin{aligned} T_0(x) &= f(0) \\ T_1(x) &= f(0) + f'(0)x \\ T_2(x) &= f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 \end{aligned}$$

   Chiaramente, se costruisco T_2 e butto via il pezzo di ordine 2, ottengo T_1.

2. Scrivere i polinomi Taylor di ordine 0, 1 e 2 di $f(x) = x^2$, centrati in $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= -1 + 2x \\ T_2(x) &= 0 + 0 + x^2 \end{aligned}$$

   Altrettanto chiaramente, se voglio T_1, non posso costruire T_2 e buttar via il pezzo di ordine 2.

3. Vedi 1. e 2.

4. Caso MacLaurin, $x_0 = 0$.

   (a) (Notazione breve: $f_0^{(k)} := f^k(0)$) Dalla teoria, sappiamo che

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{k=0}^{2} h_0^{(k)} \frac{x^k}{k!} + o(x^2) \\ &= h_0 + h_0' x + h_0'' \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= f_0 g_0 + (f_0' g_0 + f_0 g_0') x + (f_0'' g_0 + 2 f_0' g_0' + f_0 g_0'') \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned} \tag{1}$$

   (b) Metodo alternativo, sviluppare separatamente f e g, moltiplicare gli sviluppi, buttar via l'ordine più alto di 2:

$$\begin{aligned} &\left(f_0 + f_0' x + f_0'' \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \left(g_0 + g_0' x + g_0'' \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = \\ &= f_0 g_0 + x(f_0' g_0 + f_0 g_0') + \frac{x^2}{2} (f_0'' g_0 + 2 f_0' g_0' + f_0 g_0'') + o(x^2) \\ &\quad + \frac{x^3}{2}(f_0'' g_0' + f_0' g_0'') + \frac{x^4}{4} f_0'' g_0'' + o(x^3) + o(x^4). \end{aligned}$$

   L'ultima riga è trascurabile rispetto a $o(x^2)$, si butta, e si ottiene esattamente (1). Notiamo anche che servono gli sviluppi di ordine 2 di *entrambi* i fattori, per non perdere pezzi del tipo $(f_0 \cdot g_0'')x^2$.

5. Caso Taylor, $x_0 \neq 0$.

(a) Come prima, sviluppiamo $h = fg$ in x_0 all'ordine 2. (Notazione breve: $f_0^{(k)} := f^k(x_0)$)

$$h(x) = \sum_{k=0}^{2} h_0^{(k)} \frac{(x-x_0)^k}{k!} + o(x-x_0)^2 \tag{2}$$

$$= h_0 + h_0'(x-x_0) + h_0'' \frac{(x-x_0)^2}{2} + o(x-x_0)^2$$

$$= f_0 g_0 + (f_0' g_0 + f_0 g_0')(x-x_0) + (f_0'' g_0 + 2 f_0' g_0' + f_0 g_0'') \frac{(x-x_0)^2}{2} + o(x-x_0)^2 \tag{3}$$

(b) Calcolando

$$\left(f_0 + f_0'(x-x_0) + f_0'' \frac{(x-x_0)^2}{2} + o(x-x_0)^2 \right) \left(g_0 + g_0'(x-x_0) + g_0'' \frac{(x-x_0)^2}{2} + o(x-x_0)^2 \right)$$

si ottiene esattamente (3). Per vederlo, basta sostituire $y = x - x_0$ e procedere come nel caso MacLaurin.

6. Sviluppare $f(x) = x \log x$, in $x_0 = 1$ all'ordine 2.

Svolgimento. Calcoliamo

$$f'(x) = \log x + 1, \qquad f''(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{quindi} \qquad f(1) = 0, \qquad f'(1) = 1, \quad f''(1) = 1.$$

Dalla formula (2) otteniamo

$$x \log x = 0 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2 = \frac{x^2-1}{2} + o(x-1)^2. \tag{4}$$

□

$$\sim \cdot \sim \cdot \sim \cdot \sim$$

In alternativa, si può sviluppare separatamente x e $\log(x)$, e poi fare il prodotto degli sviluppi. In questo caso non si guadagna nulla, ma per funzioni più complicate può essere una buona tattica. Vediamo due modi, uno sbagliato e uno corretto.

a) Procedimento sbagliato (ma istruttivo): chiamiamo $g(x) := \log x$ e calcoliamo

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad g''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{da cui} \qquad g(1) = 0, \qquad g'(1) = 1, \quad g''(1) = -1.$$

Sviluppando

$$x \log x = x \left(g(1) + g'(1)(x-1) + g''(1) \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2 \right) \qquad \text{(corretto)}$$

$$= x \left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2 \right) \qquad \text{(corretto)}$$

$$= \left(x^2 - x - \frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{x}{2} + o(x(x-1)^2) \right) \qquad \text{(corretto)}$$

$$= \left(-\frac{3}{2}x + 2x^2 + o(x-1)^2 \right) \qquad \text{(sbagliato).}$$

Lo sbaglio consiste nel buttare via x^3 quando l'errore è $o(x-1)^2$, perchè il primo non è infinitesimo per $x \to 1$. In altre parole, trattandosi di polinomi con centro diverso da 0, calcolare il polinomio di ordine 3 e poi buttare via il pezzo di ordine > 2 non coincide con il polinomio di Taylor di ordine 2.

b) Procedimento corretto:

$$\begin{aligned} x \log x &= (1 + (x-1)) \left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2 \right) \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2 + (x-1)^2 + -\frac{(x-1)^3}{2} + o(x-1)^3 \\ &= (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2. \end{aligned}$$

Scrivere x oppure $1 + x - 1$ è chiaramente lo stesso. Il punto è che nel secondo caso i termini sono tutti della forma $a_k(x-1)^k$ e si possono buttar via i termini di ordine più alto perché sono infinitesimi per $x \to 1$. $\sim \cdot \sim \cdot \sim \cdot \sim$

7. Sviluppare

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{xe^x}, \quad \text{in} \quad x_0 = 0 \quad \text{all'ordine 2.}$$

Svolgimento. Riscriviamo f come

$$f(x) = \frac{\log(1+x) \cdot e^{-x}}{x}$$

Sviluppiamo

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ e^{-x} &= 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Inseriamo gli sviluppi di $\log(1+x)$ e di e^{-x} in $f(x)$ e sviluppiamo il prodotto:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) x + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) x^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Nota: abbiamo sviluppato $\log(1+x)$ fino all'ordine 3, perché, a posteriori, semplificando con $1/x$, dà ordine 2. Abbiamo sviluppato e^{-x} solo fino all'ordine 2 perché non si semplifica. □