MATEMATICA PER LO STUDIO DELLE INTERAZIONI STRATEGICHE:

TEORIA DEI GIOCHI

Anna TORRE [1]

1 Giochi cooperativi ad utilità trasferibile (TU-games).

Abbamo già detto cosa si intende per gioco cooperativo e abbiamo anche già analizzato alcune situazioni in cui la cooperazione gioca un ruolo essenziale: mi riferisco ad esempio alle strategie correlate e al problema della contrattazione affrontato da Nash.

Ricordo che per realizzare la cooperazione deve essere possibile stipulare accordi e deve esserci la possibilità di far rispettare tali accordi, nel senso che deve esserci una autorità accettata da tutti i componenti. Ci limiteremo allo studio dei giochi a utilità trasferibile.

I giochi ad **utilità trasferibile**, detti anche **giochi (cooperativi) a pagamenti laterali o TU-games**, sono la classe più semplice di giochi cooperativi rappresentabili in forma caratteristica.
Alla base della definizione c'è l'idea che le possibili coalizioni si possano procurare una certa utilità e in seguito spartirsela all'interno come preferiscono. Naturalmente questo implica che ci sia una scala comune di misura per le funzioni di utilità e inoltre che ci sia la possibilità di "pagamenti laterali".
Indichiamo con $P(N)$ l'insieme dei sottoinsiemi di N. I sottoinsiemi S di N ($S \subseteq N$) vengono detti **coalizioni**.

Definizione 1.1 Gioco a pagamenti laterali *Sia $N = \{1, ..., n\}$ un insieme finito e sia $v : P(N) \longrightarrow R$ una applicazione tale che $v(\emptyset) = 0$. La coppia (N, v) si dice "gioco a pagamenti laterali".*

L'interpretazione più semplice ed immediata è quella di pensare che (N è ovviamente l'insieme dei giocatori) ogni gruppo di giocatori S sia in grado di garantirsi una somma di denaro, che indichiamo con $v(S)$. Naturalmente supponiamo che $S \subseteq N$. Ed è abbastanza naturale pensare che se $S = \emptyset$ (cioè non contiene elementi!) si possa assumere che v sia uguale a zero. Vediamo un paio di esempi.

[1] Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Via Ferrata 1, 27100, Pavia, Italy. *E-mail: atorre@dimat.unipv.it*

Esempio 1.1 Gioco di maggioranza. *Sia* $N = \{1, 2, 3\}$ *e* $v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$*, mentre* $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$*. L'idea è che, per far passare una decisione (che vale 1 per il gruppo che riesce a farla passare) sia necessaria la maggioranza di N. Se sono tre individui possono mettersi d'accordo in due e presumibilmente si divideranno l'utile, oppure mettersi d'accordo tutti e tre.*

Esempio 1.2 Gioco dei guanti. *Abbiamo un insieme* N *di giocatori, che è partizionato in due sottoinsiemi* L *(i giocatori che possiedono esattamente un guanto sinistro ciascuno) ed* R *(i giocatori che possiedono esattamente un guanto destro ciascuno). Ovviamente* $N = L \cup R$ *e* $L \cap R = \emptyset$*. Data una coalizione* S*,* $v(S)$ *è uguale al numero di paia di guanti che gli elementi di* S *riescono a formare. Ad esempio se in* S *ci sono 3 elementi di* L *e 5 elementi di* R*, si ha* $v(S) = 3$*, perchè riescono a formare 3 paia di guanti (e ne avanzano due destri).*

Una importante classe di giochi a pagamenti laterali è costituita dai giochi superadditivi.

Definizione 1.2 *Sia* $G = (N, v)$ *un gioco a pagamenti laterali. G si dice superadditivo se:*
$\forall S, T \subseteq N$ *t.c.* $S \cap T = \emptyset : \ v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

L'interpretazione di tale definizione è ovvia: traduce l'idea che l'unione fa la forza. È verificata spesso. (In tale classe rientrano entrambi i giochi degli esempi precedenti). Naturalmente non è scontata in ogni situazione: può succedere che S e T siano coalizioni portatrici di interessi tra loro conflittuali e che quindi la coalizione $S \cup T$ venga penalizzata da contrasti interni o che comunque abbia dei risultati inferiori a quelli che S e T potrebbero avere separatamente. Una condizione meno restrittiva della superadditività consiste nel richiedere che il gioco sia coesivo.

Definizione 1.3 *Sia* $G = (N, v)$ *un gioco a pagamenti laterali. G si dice coesivo se:*
$\forall \{S_1, S_2, ..., S_k\}$*, partizione di* N*, si ha* $v(N) \geq \Sigma_{i=1}^{k} v(S_i)$

Esercizio 1.1 *Sia dato* $G = (N, v)$*, provare che se un gioco è superadditivo, allora è coesivo.*

Come fa intuire l'esercizio, la condizione di essere coesivo è meno restrittiva della superadditività. Se un gioco è coesivo è conveniente per i giocatori formare la "grande coalizione" N, ma non è detto che coalizzarsi sia sempre conveniente. Il problema fondamentale, dato un gioco a pagamenti laterali, è come "spartire i guadagni" tra i giocatori, oppure come spartire i costi per un gioco dei costi. Come vedremo, non c'è una indicazione univoca, o una regola "incontestabile". Vale anche per i giochi cooperativi quanto si può dire per i giochi non cooperativi. La teoria non dice quale "deve essere" la soluzione, bensì analizza le proprietà delle diverse possibili soluzioni, mettendo in evidenza sia gli aspetti "positivi" che quelli "negativi". Come di consueto, per esprimere più agevolmente e con maggiore precisione i concetti che ci interessano, avremo bisogno di un linguaggio appropriato. Introduciamo quindi la terminologia essenziale. Ci servirà, dato un insieme E finito, avere un simbolo per indicare il numero dei suoi elementi: useremo a tale fine il simbolo $|E|$. Quindi $|N|$ indica il numero complessivo dei giocatori. Per abbreviare indicheremo $|N|$ con n.

Definizione 1.4 *Sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali. Un elemento $X = (X_1, ..., X_n) \in R^n$ si dice allocazione. Se un'allocazione X verifica $\Sigma_{i=1}^n X_i = v(N)$, allora X viene detta pre-imputazione. Una pre-imputazione che soddisfa anche la condizione $X_i \geq v(\{i\})$ $\forall i \in N$ viene detta imputazione.*

L'interpretazione di una pre-imputazione è ovvia: si tratta di una ripartizione di $v(N)$ tra i giocatori. Ovviamente, il concetto di pre-imputazione è particolarmente interessante per i giochi coesivi (e quindi anche per quelli superadditivi): è per questa classe di giochi che è ragionevole immaginare che si formi la grande coalizione N e che quindi una soluzione debba consistere nello scegliere una o più di una possibile ripartizione di $v(N)$. Si noti che la condizione $\Sigma_{i=1}^n X_i = v(N)$, può essere letta come esprimente due condizioni contemporaneamente: $\Sigma_{i=1}^n X_i \leq v(N)$, (che per i giochi coesivi rappresenta una condizione di fattibilità) e $\Sigma_{i=1}^n X_i \geq v(N)$, che rappresenta invece una condizione di efficienza. Quest'ultima condizione viene anche indicata come condizione di razionalità collettiva. Da questo punto di vista, la condizione $X_i \geq v(\{i\})$ è interpretabile come condizione di razionalità individuale per il giocatore i.

Esercizio 1.2 *Trovare le imputazioni del gioco di maggioranza.*

Esercizio 1.3 *Provare che se (N, v) è coesivo, allora il gioco ha imputazioni.*

Abbiamo introdotto, a livello di interpretazione, l'idea di razionalità collettiva e di razionalità individuale. Non occorre molta fantasia per pensare anche a condizioni di razionalità intermedia, che sono date evidentemente da condizioni del tipo: $\Sigma_{i \in S} X_i \geq v(S)$, dove S è una generica coalizione. Questa idea elementare ci porta immediatamente ad uno dei concetti chiave di soluzione per un gioco a pagamenti laterali: è l'idea di nucleo.

Definizione 1.5 *Sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali. Il nucleo di G è l'insieme di tutte le allocazioni di R^n che soddisfano alle seguenti condizioni: $\Sigma_{i \in S} X_i \geq v(S)$ per ogni $S \subseteq N$, $\Sigma_{i \in N} X_i \leq v(N)$,* Appare evidente che tale definizione impone di avere una imputazione.

Esempio 1.3 di gioco con nucleo vuoto *Sia* $N = \{1, 2\}$ *e sia* $G = (N, v)$ *un gioco a pagamenti laterali, con* $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 1$ *e* $v(\{1, 2\}) = 0$. *Si vede facilmente che tale gioco non ha imputazioni, quindi ha nucleo vuoto. Non è inoltre un gioco coesivo.*

Il gioco di maggioranza è invece un esempio di gioco superadditivo (quindi coesivo) con nucleo vuoto.

Esempio 1.4 Gioco di maggioranza. *Lasciamo al lettore la verifica della superadditività. Questo implica avere imputazioni, dunque la seconda condizione della definizione di nucleo è garantita; supponiamo che* $\Sigma_{i \in S} X_i \geq v(S) \quad \forall S \subseteq N$. *Deve valere per tutte le coalizioni* S, *in particolare per* S *con 2 elementi.*

$X_1 + X_2 \geq v(\{1, 2\}) = 1$
$X_1 + X_3 \geq v(\{1, 3\}) = 1$
$X_2 + X_3 \geq v(\{2, 3\}) = 1$

Sommando membro a membro si ottiene: $2(X_1 + X_2 + X_3) \geq 3$*; ora poiche* $\Sigma_{i \in N} X_i = 1$, *nel nostro caso si ha* $X_1 + X_2 + X_3 = 1$, *allora dalla disequazione* $2(X_1 + X_2 + X_3) \geq 3$ *si ottiene* $2 \geq 3$, *cioè un assurdo, quindi il nucleo è vuoto.*

Vediamo ora un esempio con nucleo non vuoto.

Esempio 1.5 Gioco dei guanti. *Supponiamo che* $|L| = 2 < |R| = 3$, *detto* $N = \{1_L, 2_L, 3_R, 4_R, 5_R\}$ *l'insieme dei giocatori (due con un guanto sinistro e gli altri tre con un guanto destro): si ha* $v(N) = 2$. *Osserviamo che* $(1, 1, 0, 0, 0)$ *sta nel nucleo. Dimostraiamo che è l'unico elemento del nucleo. Infatti se* $X_{I_L} + X_{2_L} < 2$ *e* $X_{3_R} > 0$, *abbiamo che* $X_{1_L} + X_{2_L} + X_{4_R} + X_{5_R} = V(N) - X_{3_R} < 2$, *che è assurdo perché la coalizione* $S = \{1_L, 2_L, 4_R, 5_R\}$ *ha costruito due paia di guanti; quindi deve necessariamente essere* $X_{3_R} = 0$ *e per un analogo argomento anche* $X_{4_R} = X_{5_R} = 0$, *dunque* $X_{1_L} + X_{2_L} = 2$. *Inoltre se* $X_{1_L} > 1$ *e* $X_{2_L} < 1$, *si avrebbe* $X_{2_L} + X_{3_R} < 1$, *ma allora* $1 > X_{2_L} + X_{3_R} \geq v(\{2_L, 3_R\}) = 1$ *che è evidentemente impossibile, allora non si può altro che avere* $X_{1_L} = X_{2_L} = 1$.

2 Giochi semplici.

In Sociologia e nelle Scienze Politiche, i giochi cooperativi ad utilità trasferibile sono stati utilizzati per studiare svariati contesti decisionali che comprendono al loro interno uno scrutinio elettorale. Si consideri un dato insieme N di n giocatori: possono essere individui, città, partiti, azionisti, condomini. Si immagini una regola la quale dice quale requisito debba soddisfare un gruppo di giocatori per essere in grado di far passare una decisione. In questo contesto è naturale pensare ad un gioco in cui ogni gruppo è o vincente o perdente, nel senso che o ottiene di far passare la propria decisione o non ottiene di farla passare. Per questo tipo di situazioni, la teoria ci fornisce un modello che è proprio di una data classe di giochi cooperativi: i giochi semplici. L'idea è quella di costruire un gioco in cui ogni coalizione S è o vincente ($v(S) = 1$) o perdente ($v(S) = 0$), in altre parole la sua funzione caratteristica sia definita come $v : P(N) \longrightarrow \{0, 1\}$. Possiamo allora dire:

Definizione 2.1 Gioco semplice *Un gioco a pagamenti laterali* (N, v)*, con* $v : P(N) \longrightarrow \{0, 1\}$

si dice semplice se:

$\forall S \subseteq N,\ v(S) = 1$ *oppure* $v(S) = 0$

$v(N) = 1$

L'interpretazione è che la coalizione S che ha valore 1 possa decidere sul problema senza l'aiuto dei giocatori al di fuori di S. Per questo motivo, queste coalizioni sono chiamate vincenti. Si noti che nella definizione di gioco semplice, la coalizione N di tutti i giocatori è in grado di aggiudicarsi 1.

Esempio 2.1 Consiglio dell'ONU. *Sia* $N = \{1, ..., 15\}$ *l'insieme dei membri dell'ONU, di cui 5 sono permanenti, mentre gli altri non sono permanenti. Una coalizione* $S \subseteq N$ *è vincente se*

$\{1, ..., 5\} \subseteq S$

$|S| \geq 9$

L'esempio sul Consiglio dell'ONU ci permette di introdurre un altro concetto connesso ai giochi semplici, quello di giocatore di veto. Gli stati permanenti del Consiglio di Sicurezza hanno infatti la possibilità di porre il loro veto alle scelte decisionali del Consiglio stesso. Questa proprietà nei termini formali della teoria si traduce nella seguente definizione:

Definizione 2.2 giocatori di veto. *Sia* $G = (N, v)$ *un gioco semplice. Un elemento* $i \in N$ *si dice giocatore di veto se*

$\forall S \subseteq N\ i \notin S \Longrightarrow v(S) = 0$

Esempio 2.2 del dittatore. *Sia* (N, v) *un gioco semplice e sia* $(X_1, ..., X_n)$ *un'imputazione. Se* $v(i) = 1$*, allora* i *è detto dittatore. È possibile che* $v(i) = v(j) = 1$ *con* $i \neq j$ *? Ci sono problemi sull'imputazione, infatti poiché* $X_i \geq v(i) = 1$ *e* $X_j \geq v(j) = 1$*, allora* $\Sigma_{i \in N} X_i \neq 1$*. Quindi nel caso ci siano due dittatori l'allocazione* $(X_1, ..., X_n)$ *non può essere un'imputazione. In tale caso il gioco avrebbe nucleo vuoto e non è coesivo. Questo vuole evidenziare che la definizione di gioco semplice è larga (ci possono essere vari dittatori: situazione istituzionale un pò strana). Inoltre l'essere dittatore non implica avere diritto di veto.*

Teorema 2.1 *Dato un gioco semplice $G = (N, v)$, il suo nucleo è non vuoto se e solo se c'è almeno un giocatore di veto.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Si supponga che v non abbia giocatori di veto. Allora, per ogni $i \in N$, esiste una coalizione $S \subseteq N$ tale che $i \notin S$ e $v(S) = 1$. Per un'imputazione X che sta nel nucleo, abbiamo che:

$\Sigma_{j \in N} X_j = v(N) = 1$

$\Sigma_{j \neq i} X_j \geq \Sigma_{j \in S} X_j \geq v(S) = 1$

Quindi $X_i = 0$ per ogni $i \in N$, e perciò X non può essere un'imputazione. Questa contraddizione prova che il nucleo è vuoto.

($\Leftarrow$) Si supponga ora che v abbia almeno un giocatore di veto. Sia S l'insieme di tali giocatori di veto $|S| \geq 1$) Sia X un' allocazione tale che

$\Sigma_{i \in S} X_i = 1$

con $X_i \geq 0$ $\forall i \in S$ e $X_i = 0$ per $i \notin S$

Ora, se T è una coalizione vincente, dobbiamo avere $S \subseteq T$ e poichè la somma delle componenti dell'allocazione in S deve essere pari ad 1 si ottiene

$\Sigma_{i \in T} X_i \geq \Sigma_{i \in S} X_i = v(T)$

il che significa che X rispetta la razionalità intermedia per ogni $T \subset N$ oltre che quella individuale e collettiva. Quindi X appartiene al nucleo.

3 Valore Shapley.

Come fanno intravvedere gli esempi e gli esercizi, il nucleo di un gioco dà conto della forza dei vari giocatori (espressa attraverso $v(S)$). Tuttavia ne tiene conto in modo per così dire rigido. Tanto è vero che nel gioco di maggioranza il nucleo è vuoto. Oppure, nel gioco dei guanti si ha una ripartizione dei profitti che sembra eccessivamente unilaterale. Ancora per i giochi semplici (in particolare, vedasi l'esempio dell'ONU), tutto il potere è nelle mani dei veto-player. A questi problemi se ne aggiunge un altro: il nucleo di un gioco (se non vuoto) contiene in genere più di una allocazione. Quindi, il nucleo non ci offre la soluzione, bensì solo un modo per scartare, per così dire, allocazioni che sarebbero instabili (se $\Sigma_{i \in S} X_i < v(S)$, la coalizione S ha interesse a defezionare dalla grande coalizione N, se si insiste sulla ripartizione $(X_1, X_2, ..., X_n)$). Vi è un altro concetto di soluzione che viene incontro a questo tipo di obiezioni (ma ovviamente gliene potremo fare altre, di altro genere...): si tratta del cosiddetto Valore Shapley. Un modo per introdurre il valore Shapley è quello di usare la strada assiomatica già usata da Nash per i problemi di contrattazione. Ci chiediamo, cioè quali proprietà debba soddisfare un ragionevole criterio allocazione di $v(N)$ tra i giocatori. Un primo criterio, ovvio, è l'anonimità. Cioè, quanto viene dato ad un giocatore non deve dipendere da chi è questo giocatore (cio, se si tratta di Marco o Enrico), ma solo da quanto il giocatore è in grado di ottenere da solo o con altri. Vediamo un esempio

Esempio 3.1 *Abbiamo tre giocatori che per semplicità chiameremo* $1, 2, 3$ *Si ha:* $v(1) = v(2) = v(3) = 0$*;* $v(1, 2) = v(1, 3) = 4; v(2, 3) = 6; v(1, 2, 3) = 20$*. Consideriamo ora un altro gioco,* w*, che assegna agli stessi giocatori (e alle loro coalizioni) i seguenti valori:* $w(1) = w(2) = w(3) = 0)$ $w(2, 3) = w(1, 3) = 4; w(1, 2) = 6; w(1, 2, 3) = 20$*. Che differenza c'è tra il gioco* v *e quello* w *? Che in* w *il giocatore 3 si trova nella identica situazione in cui il giocatore 1 si trovava nel gioco* v*. L'idea di anonimità richiede che noi diamo al giocatore 3, nel gioco* w*, esattamente quello che diamo al giocatore 1 nel gioco* v*. Si noti che in questo esempio abbiamo usato notazioni SCORRETTE. Dovremmo scrivere* $v(\{1\})$ *invece di* $v(1)$*,* $v(\{1, 2\})$ *invece di* $v(1, 2)$*, ecc. Ma d'ora in poi faremo così, per evitare di scrivere troppe parentesi graffe...*

Esempio 3.2 *Sia* $N = \{1, 2, 3\}$*. Prendiamo* $\sigma : N \longrightarrow N$ *così definita:* $\sigma(1) = 3,\ \sigma(2) = 2,\ \sigma(3) = 1$*. Se* $S = \{1, 2\}$*, abbiamo che* $\sigma(S) = \{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{3, 2\} = \{2, 3\}$*. Quindi,* $\sigma v(1, 2) = v(2, 3)$*. Se prendiamo* $T = \{2, 3\}$*, abbiamo che* $\sigma(T) = \{\sigma(2), \sigma(3)\} = \{2, 1\} = \{1, 2\}$*. Quindi,* $\sigma v(2, 3) = v(1, 2)$*. Dovrebbe essere evidente che il gioco* w *nell'esempio precedente non è altro che il gioco* $\sigma(v)$*, essendo* σ *la permntazione che stiamo considerando (quella che scambia l con 3).*

L'idea è ovviamente di chiedere che:

- 1) **Anonimità.** Sia v un gioco e $\sigma : N \longrightarrow N$ una permutazione. Allora, $\Phi_i(v) = \Phi_{\sigma(i)}(\sigma v)$ Cioè nell'esempio: sia $i = 1$. Allora $\sigma(i) = \sigma(1) = 3$. Vogliamo quindi che $\Phi_3(\sigma v) = \Phi_3(w) = \Phi_1(v)$. Cioè quel che viene assegnato al giocatore 1 nel gioco v, deve essere assegnato al giocatore 3 nel gioco w.

  Un'altra condizione che imponiamo a Φ è la seguente:

- 2) **Efficienza.** Per ogni gioco v, $\Phi(v)$ è una pre-imputazione.

  L'interpretazione di questo assioma è ovvia, deve essere $\Sigma_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$. Quindi, il valore F deve ripartire tra i giocatori quello che riesce ad ottenere la grande coalizione.

  Per introdurre l'assioma successivo abbiamo bisogno di dire cos'è il contributo marginale di un giocatore. Se S è una coalizione, ed $i \in S$, il numero reale $v(S \cup i) - v(S)$ viene detto contributo marginale di i alla coalizione S. Se $i \in N$ è tale che $v(S \cup i) = v(S)$, allora i è un dummy player (giocatore ininfluente); assumendo che in tale caso $v(i) = o$. Formalizziamo con il seguente assioma.

- 3) **Dummy player property.** Se in un gioco v il giocatore i un dummy player, allora $\Phi_i(V) = 0$.

  Infine l'ultima condizione.

- 4) **Additività.** $\Phi_i(v+w) = \Phi_i(v) + \Phi_i(w)$, per ogni $i \in N$.

  Dei quattro assiomi quest'ultimo è il più discutibile, in quanto sommare due giochi pu produrre un terzo gioco in cui la posizione strategica del giocatore i potrebbe essere difficilmente correlata a quella che lui ha nei due giochi addendi.

Teorema 3.1 *Shapley(1953). Esiste ed unica $\Phi : G(N) \longrightarrow R^n$ che soddisfa i 4 assiomi, inoltre si ha:*
$\Phi_i(v) = \frac{1}{n!}\Sigma_\sigma m_i^\sigma(v)$ *per ogni* $i \in N$
Φ *e detta valore Shapley del gioco.*

Per capire la formula, dobbiamo sapere cosa vuol dire $m_i^\sigma(v)$. L'idea è semplice : consideriamo $\sigma(1), \sigma(2), ...\sigma(n)$. Essendo $i \in N$, ci sarà un certo indice $j \in N$ t.c. $i = \sigma(j)$. Consideriamo allora la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), ...\sigma(j-1)\}$ e la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), ...\sigma(j)\}$. Essendo $i = \sigma(j)$, abbiamo che i non appartiene alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), ...\sigma(j-1)\}$, mentre $\{\sigma(1), \sigma(2), ...\sigma(j)\}$ è ottenuta aggiungendo i. Allora $v(\{\sigma(1), \sigma(2), ...\sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), ...\sigma(j-1)\})$ è il contributo marginale di i alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), ...\sigma(j-1)\}$. E $m_i^\sigma(v)$ indica esattamente ciò. La formula ha una interpretazione probabilistica. Supponiamo che i giocatori entrino uno dopo l'altro in una stanza, seguendo l'ordine dato dalla permutazione σ. Ad ogni giocatore, entrando nella stanza, viene dato il suo contributo marginale alla coalizione che già si trovava nella stanza. Non c'è ragione di privilegiare una permutazione rispetto ad un'altra. E quindi calcoliamo il valor medio di questi contributi marginali. Da qui la formula (ricordo che n! è il numero di permutazioni su un insieme di n elementi). La formula data può naturalmente essere usata per clacolare il valore Shapley, però ha il difetto di richiedere una quantità di calcoli enorme, se il numero totale dei giocatori è grande. Si noti che ad esempio è 10! = 3.628.800 e quindi se abbiamo un gioco con l0 giocatori questo è' il numero di addendi della somma che dobbiamo calcolare applicando la formula. Se il gioco è piccolo, la formula ci permette di calcolare il valore Shapley abbastanza facilmente.

Calcoliamo a titolo di esempio il valore Shapley per il gioco di maggioranza: Ricordo che nel Gioco di maggioranza abbiamo $N = \{1, 2, 3\}$ e $v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, mentre $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$. Calcoliamo tutti i contributi marginali del giocatore 1:

Permutazioni	Contributi marginali	Calcolo
$1, 2, 3$	$v(1) - v(\emptyset)$	0
$1, 3, 2$	$v(1) - v(\emptyset)$	0
$2, 1, 3$	$v(1, 2) - v(2)$	1
$2, 3, 1$	$v(1, 2, 3) - v(2, 3)$	0
$3, 1, 2$	$v(1, 3) - v(3)$	1
$3, 2, 1$	$v(1, 2, 3) - v(2, 3)$	0

Quindi si ha $\Phi_1(v) = \frac{1}{3}$ e per simmetria:
$\Phi(v) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$