Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 7 marzo 2012

email: anna.torre@unipv.it

sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2012.html

"DECISORI RAZIONALI INTERAGENTI" di Fioravante Patrone, edizioni PLUS, Pisa 2006

COME DESCRIVERE UN GIOCO

- Una importante classificazione che occorre fare nel contesto dei giochi discende dalla risposta alla seguente domanda:
“Vi è oppure no per i giocatori la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti?”
- in presenza di questa possibilità si parla di **giochi cooperativi**, in caso contrario si parla di **giochi non cooperativi**.
- **Parleremo di giochi non cooperativi a due giocatori.**

Giochi non cooperativi

Due modalità rappresentative:

- la **forma estesa**
- la **forma normale o strategica**.

Giochi non cooperativi

Due modalità rappresentative:

- la **forma estesa**
- la **forma normale o strategica**.

- Un gioco è **in forma estesa** quando la descrizione è fatta mossa per mossa fino ad arrivare a presentare tutte le situazioni finali, ciascuna esito univoco di una data serie di mosse.

Giochi non cooperativi

Due modalità rappresentative:

- la **forma estesa**
- la **forma normale o strategica**.

- Un gioco è **in forma estesa** quando la descrizione è fatta mossa per mossa fino ad arrivare a presentare tutte le situazioni finali, ciascuna esito univoco di una data serie di mosse.
- La **forma normale (o strategica)** invece precisa le strategie. Le strategie in questa descrizione sono un dato del problema, mentre nella forma estesa il dato sono le mosse, ed un compito di chi analizza il gioco è proprio quello di dedurre da queste le strategie di ogni giocatore.

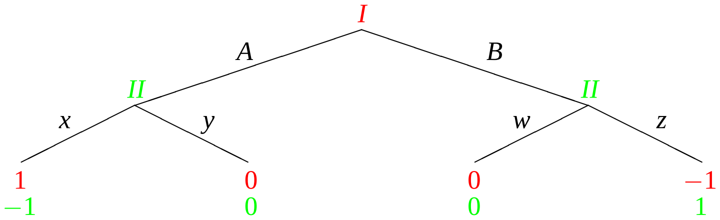
Un'ulteriore distinzione è quella fra
giochi ad Informazione completa e giochi ad Informazione incompleta.
In un gioco a **Informazione completa** le regole del gioco e le funzioni di utilità di tutti i giocatori sono conoscenza comune dei giocatori.

L'ipotesi di informazione incompleta porta a una teoria più sofisticata ma anche più soddisfacente, proprio in quanto più aderente alla realtà. Noi però per il momento ci occuperemo di giochi **a informazione completa**.

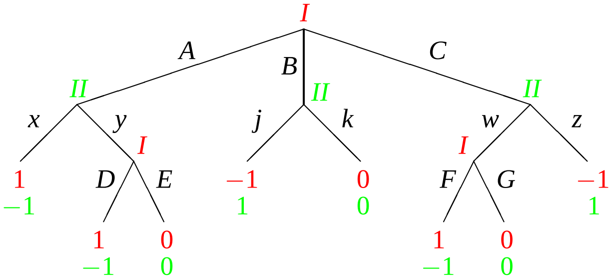
Forma estesa

La forma estesa consiste in una descrizione dettagliata di tutte le possibili partite. È stata introdotta da von Neumann e Morgenstern (1944) e formalizzata da Kuhn (1953)

UN ALTRO GIOCO IN FORMA ESTESA



UN ALTRO GIOCO IN FORMA ESTESA



FIAMMIFERI

Ci sono due mucchietti di due fiammiferi ciascuno.

Due giocatori a turno levano un certo numero (strettamente positivo) di fiammiferi tutti dallo stesso mucchio.

Chi toglie l'ultimo fiammifero perde.

Costruiamo un albero.

FIAMMIFERI

Cominciamo con il descrivere tutte le possibili mosse del primo giocatore all'inizio della partita. Cosa può fare il primo gicatore? Può togliere dal primo mucchietto uno o due fiammiferi oppure fare la stessa cosa dal secondo mucchietto. Naturalmente c' è simmetria tra le operazioni che si possono fare sul primo e sul secondo mucchietto e quindi possiamo pensare che possa solo togliere dal primo.

Indichiamo con:

a "toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto"

b "toglie 2 fiammiferi dal primo mucchietto"

FIAMMIFERI

A questo punto cosa può fare il secondo giocatore?

Se il primo giocatore ha scelto **a** può scegliere le mosse:

A “toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto”

B “toglie 1 fiammifero dal secondo mucchietto”

C “toglie 2 fiammiferi dal secondo mucchietto”

FIAMMIFERI

Se il primo giocatore ha scelto **b** può scegliere le mosse:

D “toglie 1 fiammifero dal secondo mucchietto”

E “toglie 2 fiammiferi dal secondo mucchietto”

A questo punto se sono state scelte **b** ed **E** il gioco è finito e ha vinto I.

Altrimenti gioca I.

È chiaro capire cosa può fare I e poi II

FIAMMIFERI

Indichiamo con

c“toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto”

d“toglie 2 fiammiferi dal primo mucchietto”

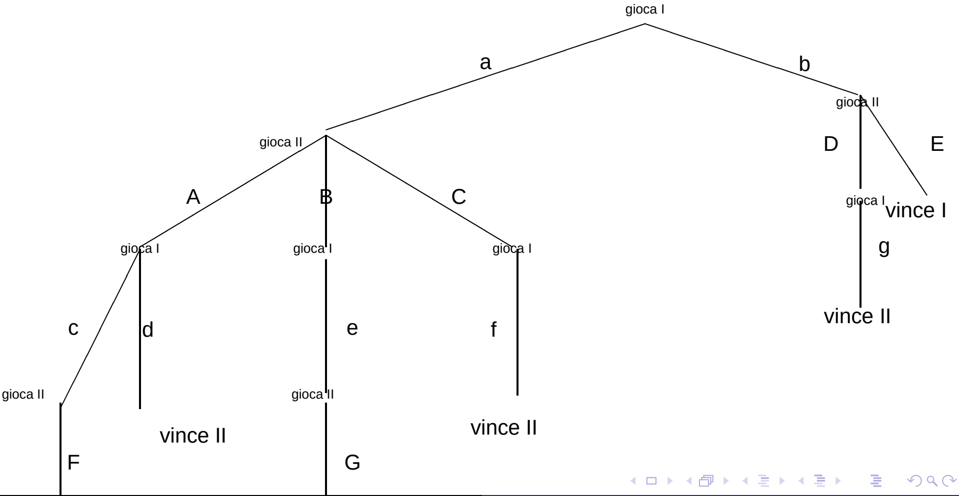
e“toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto” **f**“toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto”

g“toglie 1 fiammifero dal secondo mucchietto”

F“toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto”

G“toglie 1 fiammifero dal secondo mucchietto”

FIAMMIFERI


gioca I
a
b
gioca II
gioca II
A
B
C
D
E
gioca I
gioca I
gioca I
gioca I
vince I
g
c
d
e
f
vince II
gioca II
gioca II
vince II
vince II
F
G

FIAMMIFERI

Per il momento non abbiamo ancora un gioco: abbiamo una "game form".
Per avere un gioco dobbiamo conoscere le funzioni di utilità dei due giocatori.
Abbiamo degli esiti che non son quantificati. Come viene interpretato "vince I" dai due giocatori? Potremmo dire 1 per il primo giocatore e -1 per il secondo se supponiamo che i giocatori vogliano vincere. ma siamo sicuri che l'utilità della vittoria per il primo giocatore sia uguale all'utilità della vittoria per il secondo?
Se ci fosse un premio di 1000 euro e il giocatore I fosse uno studente mentre il giocatore II un imprenditore affermato?
Abbiamo descritto l'albero di un gioco finito a informazione perfetta.
Un gioco descritto tramite una successione finita di mosse (finito) si dice a informazione perfetta se lo stato del gioco è noto (pubblico) ai due giocatori dopo ogni mossa.

TEOREMA DI ZERMELO-KUHN

E. Zermelo, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, Proc. Fifth Congress Mathematicians, (Cambridge 1912), Cambridge University Press 1913, 501-504.

Kuhn, Harold W. (1953), Extensive Games and the Problem of Information, in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), Contributions to the Theory of Games, Volume II, Princeton University Press, Princeton.

Un gioco in forma estesa a informazione perfetta ha un equilibrio che si ottiene per induzione a ritroso (vedremo poi che questo è un equilibrio di Nash).

SCACCHI

Il gioco degli scacchi si riduce all'albero (gigantesco, ma finito) che comprende tutte le possibili mosse di tutte le possibili partite:
il primo livello consiste delle 20 possibili aperture del bianco;
il secondo livello delle 20 possibili aperture del nero in risposta a ciascuna apertura del bianco, cioè dei 400 possibili scambi di apertura;
ogni livello si ottiene dal precedente aggiungendo a ciascun nodo tutte le possibili risposte.
Ciascun ramo dell'albero è finito, e descrive una partita che finisce o in una vittoria del bianco, o in una vittoria del nero, o in una patta.

IL TEOREMA SUGLI SCACCHI

Al Congresso Internazionale dei Matematici del 1912 Ernst Zermelo notò che il gioco degli scacchi è determinato, nel senso seguente: o esiste una strategia che permette al bianco di vincere sempre, o esiste una strategia che permette al nero di vincere sempre, o esiste una strategia che permette a entrambi i giocatori di pattare sempre (affermazione ben più forte di quella, ovvia, che in ogni partita o il bianco vince, o il nero vince, o i due pattano).
Nel 1953 Kuhn generalizzò il risultato a tutti i giochi in forma estesa a informazione perfetta.

INFORMAZIONE PERFETTA

Un gioco descritto tramite una successione finita di mosse (finito) si dice a informazione perfetta se lo stato del gioco è noto (pubblico) a tutti i giocatori dopo ogni mossa.

MOSSE CONTEMPORANEE E MOSSE DEL CASO

Per descrivere i giochi in forma estesa ci restano ancora due problemi:

- Come descrivere il caso di mosse contemporanee?
- Come descrivere la situazione in cui ci sono “mosse del caso"?

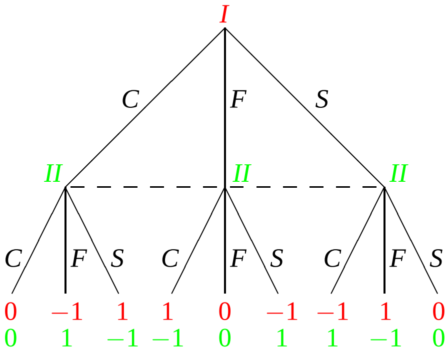
LA MORRA CINESE

- Si gioca in due.
- Ciascun giocatore deve dichiarare contemporaneamente all'altro una delle seguenti mosse:

Carta, Forbice, Sasso.

- Forbice vince su Carta;
- Carta vince su Sasso;
- Sasso vince su Forbice.
- Se entrambi giocano la stessa cosa la partita è pari.

LA MORRA CINESE IN FORMA ESTESA



Si tratta di un gioco a informazione imperfetta, perché le mosse sono contemporanee (qui abbiamo scritto il gioco con i valori di utilità convenzionali per i due giocatori: 1 per la vittoria, 0 per il pareggio e -1 per la sconfitta).

UN POKER SEMPLIFICATO

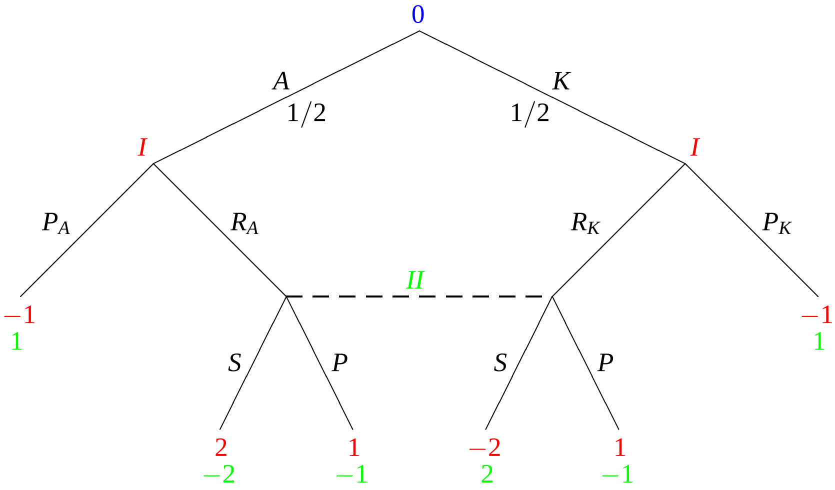
C'è un mazzo con sole due carte: A e K. A è la carta "alta" (cioè quella che vince) e K è la carta bassa.
Il mazzo viene accuratamente mescolato; il gioco inizia con I che estrae una carta dal mazzo coperto e la guarda. Può fare due cose:

- **passare**, nel qual caso lui deve dare 1 euro a II;
- **rilanciare** (a 2 euro).

Se I ha passato, il gioco è finito. Se ha rilanciato, tocca a II, il quale può:

- **passare**, nel qual caso è lui che deve dare 1 euro a I;
- **vedere**, nel qual caso I deve mostrare la sua carta e
  - se I ha la carta "alta", cioè A, II deve dare 2 euro a I;
  - se I ha la carta "bassa", cioè K, I deve dare 2 euro a II.

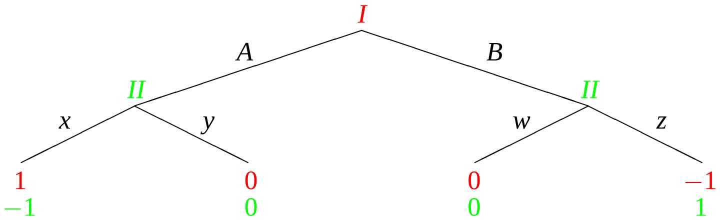
IL POKER SEMPLIFICATO IN FORMA ESTESA



MOSSE E STRATEGIE

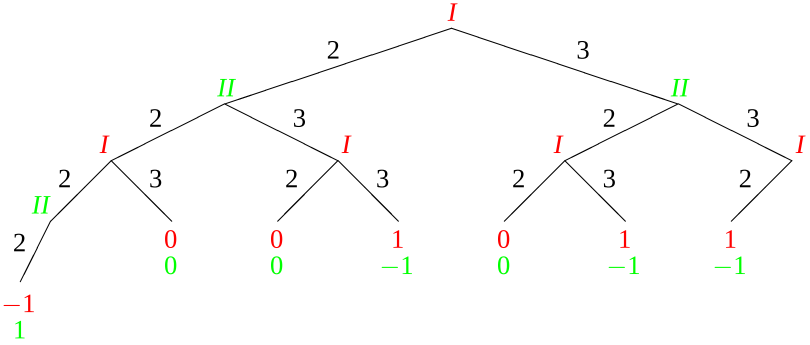
Una strategia di un giocatore è un completo piano d'azione. Esso specifica un'azione ammissibile del giocatore per ciascuna circostanza in cui il giocatore può essere chiamato ad agire.
Un profilo di strategie (talvolta chiamato anche combinazione di strategie) è un insieme di strategie per ogni giocatore che specifica interamente tutte le azioni in un gioco. Un profilo di strategie deve contenere una e una sola strategia per ogni giocatore.
Il concetto di strategia è talvolta (erroneamente) confuso con quello di mossa. Una mossa è un'azione intrapresa da un giocatore ad un certo punto durante la riproduzione di un gioco (ad esempio, negli scacchi, il bianco sposta il cavallo da b1 in c3). Una strategia è invece un algoritmo per giocare il gioco, nel quale un giocatore dice che cosa fare per ogni possibile situazione in tutta la partita.(Wikipedia)

FORMA ESTESA E FORMA STRATEGICA

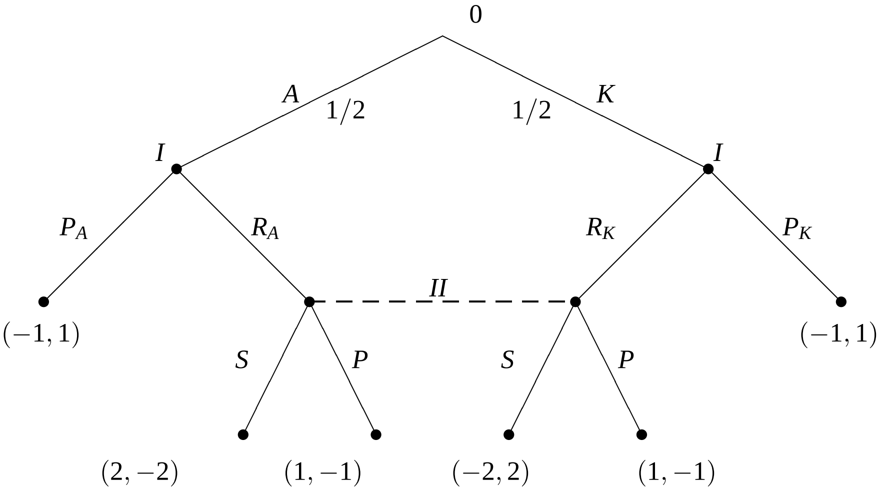


I \ II	$(x;w)$	$(y;w)$	$(x;z)$	$(y;z)$
A	$(1,-1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(-1,1)$

IL GIOCO DELL'OTTO (IN "FORMA ESTESA")



I \ II	(2,2)	(2,3)	(3,2)	(3,3)
(2,(2;2;2))	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
(2,(2;2;3))	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
(2,(2;3;2))	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$
(2,(2;3;3))	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$
(2,(3;2;2))	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
(2,(3;2;3))	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
(2,(3;3;2))	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$
(2,(3;3;3))	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$
(3,(2;2;2))	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$
(3,(2;2;3))	$(1, -1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$
(3,(2;3;2))	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$
(3,(2;3;3))	$(1, -1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$
(3,(3;2;2))	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$
(3,(3;2;3))	$(1, -1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$
(3,(3;3;2))	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(1, -1)$
(3,(3;3;3))	$(1, -1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$


0
A
1/2
1/2
K
I
I
P_A
R_A
R_K
P_K
II
(−1, 1)
(−1, 1)
S
P
S
P
(2, −2)
(1, −1)
(−2, 2)
(1, −1)

IL POKER SEMPLIFICATO IN FORMA STRATEGICA

$I \backslash II$	P	S
$R_A R_K$	$(1, -1)$	$(0,0)$
$R_A P_K$	$(0,0)$	$(-1/2, 1/2)$
$P_A P_K$	$(-1, 1)$	$(-1,1)$
$P_A R_K$	$(0, 0)$	$(-3/2,3/2)$

SOMMA ZERO

Un gioco non cooperativo a due giocatori si dice

A SOMMA ZERO

se per ogni esito del gioco la somma delle utilità dei due giocatori è 0
Ciò significa che i due giocatori sono completamente antagonisti.
Von Neumann e Morgenstern si sono occupati solo di giochio a somma zero.

UN TENTATIVO DI SOLUZIONE: IL MASSIMO OMBRA

Dato un gioco in forma strategica con due giocatori

$$(X, Y, f, g)$$

chiamiamo massimo ombra una coppia di strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ tale che

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, y), \qquad g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(x, y)$$

per ogni $x \in X, \quad y \in Y$

IL MASSIMO OMBRA IN DIFFICOLTA':
UN GIOCO DI COORDINAMENTO

$I \backslash II$	L	R
T	5,5	0,0
B	0,0	5,5

Nemmeno l'esistenza del massimo ombra assicura una soluzione soddisfacente: basta considerare questo "gioco di puro coordinamento", in cui non c'è divergenza di interessi, ma solo difficoltà di coordinamento. Se i due giocatori hanno la possibilità di comunicare prima di entrare nella stanza e schiacciare il bottone è possibile confluire in un massimo ombra, altrimenti no.