Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 12 marzo 2013

email: anna.torre@unipv.it

sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2013.html

MODALITÀ DI ESAME

- La frequenza è obbligatoria perché l'esame venga registrato;
- È previsto un appello alla fine del corso: scritto per chi ha diritto a 3 crediti, scritto e orale chi ha diritto a più crediti;
- Un altro appello in giugno;
- In seguito mi dovete contattare per email

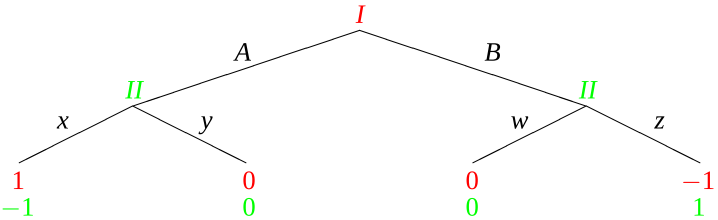
BIBLIOGRAFIA PICCOLA

- Myerson "Game Theory: Analysis of Conflict", Harvard University Press (1991).
- Patrone "Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla teoria dei giochi", PLUS (2006)
- Owen "Game Theory", Academic Press, New York (1995)
- Luce, Raiffa , "Games and Decisions", Wiley, New York (1957).

MOSSE E STRATEGIE

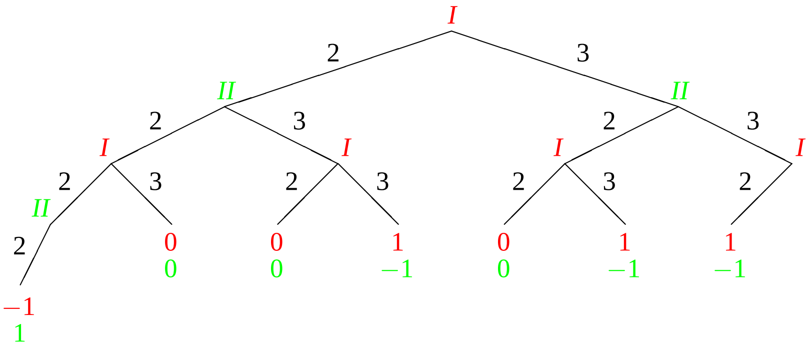
- Strategia di un giocatore : un completo piano d'azione, cioè un'azione ammissibile del giocatore per ciascuna circostanza in cui il giocatore può essere chiamato ad agire.
- Profilo di strategie: un insieme di strategie una per ogni giocatore. Un profilo di strategie deve contenere una e una sola strategia per ogni giocatore.
- Non bisogna confondere Il concetto di strategia con quello di mossa. Una mossa è un'azione intrapresa da un giocatore ad un certo punto durante la riproduzione di un gioco (ad esempio, negli scacchi, il bianco sposta il cavallo da b1 in c3). Una strategia è invece un algoritmo per giocare il gioco, nel quale un giocatore dice che cosa fare per ogni possibile situazione in tutta la partita.(Wikipedia)

FORMA ESTESA E FORMA STRATEGICA



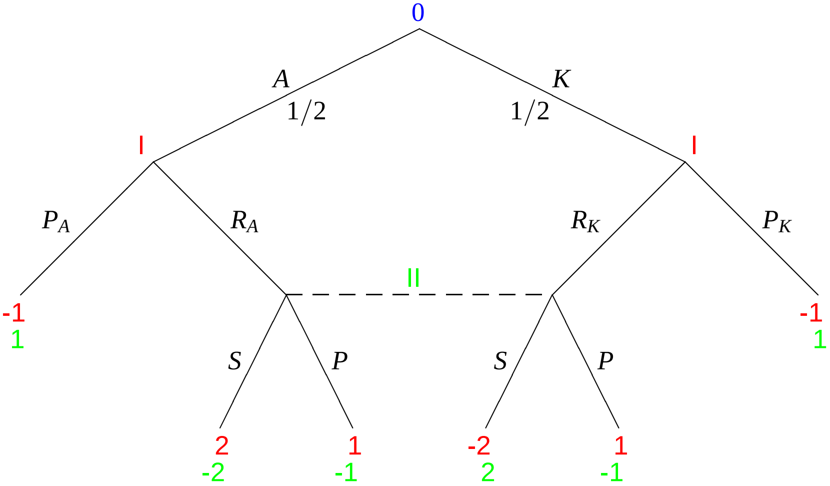
I \ II	(x;w)	(y;w)	(x;z)	(y;z)
A	(1,-1)	(0, 0)	(1,-1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(0, 0)	(-1,1)	(-1,1)

IL GIOCO DELL'OTTO (IN "FORMA ESTESA")



I \ II	(2;2)	(2;3)	(3;2)	(3;3)
(2,(2;2;2))	(-1, 1)	(-1, 1)	(0, 0)	(0, 0)
(2,(2;2;3))	(-1, 1)	(-1, 1)	(0, 0)	(0, 0)
(2,(2;3;2))	(-1, 1)	(-1, 1)	(1,-1)	(1,-1)
(2,(2;3;3))	(-1, 1)	(-1, 1)	(1,-1)	(1,-1)
(2,(3;2;2))	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
(2,(3;2;3))	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
(2,(3;3;2))	(0, 0)	(0, 0)	(1,-1)	(1,-1)
(2,(3;3;3))	(0, 0)	(0, 0)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(2;2;2))	(0, 0)	(0, 0)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(2;2;3))	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(2;3;2))	(0, 0)	(0, 0)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(2;3;3))	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(3;2;2))	(0, 0)	(0, 0)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(3;2;3))	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(3;3;2))	(0, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(1,-1)
(3,(3;3;3))	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)

IL POKER SEMPLIFICATO IN FORMA ESTESA



IL POKER SEMPLIFICATO IN FORMA STRATEGICA

I \ II	P	S
$R_A R_K$	(1, -1)	(0,0)
$R_A P_K$	(0,0)	(1/2, -1/2)
$P_A P_K$	(-1, 1)	(-1,1)
$P_A R_K$	(0, 0)	(-3/2,3/2)

SOMMA ZERO

Un gioco non cooperativo a due giocatori si dice

A SOMMA ZERO

se per ogni esito del gioco la somma delle utilità dei due giocatori è 0
Ciò significa che i due giocatori sono completamente antagonisti.
Von Neumann e Morgenstern si sono occupati solo di giochio a somma zero.

UN TENTATIVO DI SOLUZIONE: IL MASSIMO OMBRA

Dato un gioco in forma strategica con due giocatori

$$(X, Y, f, g)$$

chiamiamo massimo ombra una coppia di strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ tale che

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, y), \qquad g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(x, y)$$

per ogni $x \in X, \quad y \in Y$

IL MASSIMO OMBRA IN DIFFICOLTA': UN GIOCO DI COORDINAMENTO

I \ II	L	R
T	5,5	0,0
B	0,0	5,5

Nemmeno l'esistenza del massimo ombra assicura una soluzione soddisfacente: basta considerare questo "gioco di puro coordinamento", in cui non c'è divergenza di interessi, ma solo difficoltà di coordinamento. Se i due giocatori hanno la possibilità di comunicare prima di entrare nella stanza e schiacciare il bottone è possibile confluire in un massimo ombra, altrimenti no.

STRATEGIA DOMINANTE

Dato un gioco a due giocatori in forma strategica

$$(X, Y, f, g),$$

se per un certo $\bar{x}$

$$f(\bar{x}, y) \geq f(x, y)$$

per ogni $x \in X$ (diverso da $\bar{x}$) e per ogni $y \in Y$, diciamo che $\bar{x}$ è una strategia (debolmente) dominante.
Se il giocatore I ha una strategia dominante, I giocherà $\bar{x}$.

STRATEGIA DOMINANTE

Dato un gioco a due giocatori in forma strategica

$$(X, Y, f, g),$$

se per un certo $\bar{x}$ e un certo x^*

$$f(\bar{x}, y) \geq f(x^*, y)$$

per ogni $y \in Y$, diciamo che $\bar{x}$ domina debolmente x^*.
Se $\bar{x}$, domina x^* possiamo supporre che il giocatore I non giocherà x^*.

ELIMINAZIONE ITERATA DI STRATEGIE DOMINATE: SUCCESSI

I \ II	x	y	z
A	(2, 1)	(1, 3)	(0, 1)
B	(3, 0)	(2, 2)	(1, 3)
C	(1, 1)	(4,-1)	(-1, 0)
D	(2, 4)	(0, 0)	(-1, 3)

ELIMINAZIONE ITERATA DI STRATEGIE DOMINATE: LIMITI

I \ II	x	y	z
A	(2, 1)	(1, 3)	(0, 1)
B	(3, 0)	(2, 2)	(1, 3)
C	(1, 1)	(4,-1)	(2, 0)
D	(2, 4)	(0, 0)	(-1, 3)

EQUILIBRIO DI NASH

Consideriamo il gioco:
$(X,\ Y,\ f,\ g:\ X \times Y \to \mathbf{R})$
dove X e Y sono gli spazi di strategie, e f, g sono le funzioni di utilità dei giocatori
$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ si dice equilibrio di Nash se

1. $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$;
2. $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$.

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

I \ II	S	T
S	(5, 5)	(0, 6)
T	(6, 0)	(1, 1)

Punto di vista di I:

I \ II	S	T
S	(5)	(0)
T	(6)	(1)

Punto di vista di II:

I \ II	S	T
S	(5)	(6)
T	(0)	(1)

La soluzione è: i giocatori giocano entrambi T e prendono 1 ciascuno, ma il risultato è inefficiente.

Equilibri di Nash

Un massimo ombra è un equilibrio di Nash.
Gli elementi ottenuti per eliminazione di strategie dominate sono equilibri di Nash.
In un gioco in forma estesa a informazione perfetta gli equilibri ottenuti per induzione a ritroso sono equilibri di Nash del corrisponedente gioco in forma strategica.
Ma un equilibrio di Nash può non essere ne un massimo ombra ne ottenuto per eliminazione di strategie dominate.

Equilibri di Nash

Alla base della definizione di equilibrio di Nash vi sono alcuni presupposti:

- Immaginiamo che i due giocatori si mettano d'accordo per giocare, l'uno la strategia $\bar{x}$ e l'altro la strategia $\bar{y}$.
- I due giocatori effettuano le loro scelte contemporaneamente ed indipendentemente.
- I giocatori non possono effettuare tra di loro degli accordi vincolanti.
- L'accordo deve resistere a considerazioni del tipo seguente da parte per esempio del giocatore I: "visto che se violo l'accordo non mi succede nulla, vediamo se posso far di meglio anzichè giocare la $\bar{x}$. Le possibilità sono due: o II non rispetta l'accordo, e allora inutile tenerne conto, oppure lo rispetta. In questo secondo caso, vediamo se non c'è un'altra strategia x per cui $f(x, \bar{y}) > f(\bar{x}, \bar{y})$"

Equilibri di Nash

Affinché $(\bar{x}, \bar{y})$ sia ragionevole occorre che resista a tentazioni di questo tipo, cioè appunto
$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$.
Analoghe considerazioni da parte del giocatore II portano alla condizione $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$

Equilibri di Nash

La definizione di equilibrio di Nash è strutturata in modo da tenere conto di queste considerazioni: le condizioni dicono che nessuno dei giocatori ha convenienza a deviare dalla strategia che gli è “prescritta” dall’equilibrio, a condizione che neppure l’altro giocatore “devii”’.
Di solito, quando si parla di equilibri, si usa chiamarli equilibri di Nash o di Cournot-Nash. La ragione è la seguente:
John F. Nash, ([1950]: Equilibrium Points in n-Person Games, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36, 48-49) prova un importante teorema il quale garantisce l’esistenza di un equilibrio per una classe molto ampia ed importante di giochi, estendendo al caso generale il risultato di von Neumann per i giochi a somma zero (cioè quelli per cui $f(x,y) + g(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in X \times Y$).
Cournot nel 1838 aveva “anticipato” la TdG adottando, come “soluzione” per un modello di oligopolio, proprio questa idea di equilibrio.

LA BATTAGLIA DEI SESSI

I \ II	S	T
S	(2, 1)	(0, 0)
T	(0, 0)	(1, 2)

IL PARI O DISPARI

II / I	S	T
S	(-1, 1)	(1, -1)
T	(1, -1)	(-1, 1)

Questo gioco ha equilibri di Nash? Ha strategie dominate?

È RILEVANTE SCEGLIERE PER PRIMI?

I \ II	NP	P
NP	(2, 2)	(0, 3)
P	(3, 0)	(1, 1)

I \ II	S	T
S	(2, 1)	(0, 0)
T	(0, 0)	(1, 2)

I \ II	L	R
T	(-1, 1)	(1,-1)
B	(1,-1)	(-1, 1)

AUMENTARE I PLAYOFF MIGLIORA LA SITUAZIONE?

I \ II	P	D
P	(12, 12)	(102,11)
D	(11,102)	(101, 101)

I \ II	P	D
P	(9, 9)	(99, 10)
D	(10, 99)	(100,100)