

Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 19 marzo 2013

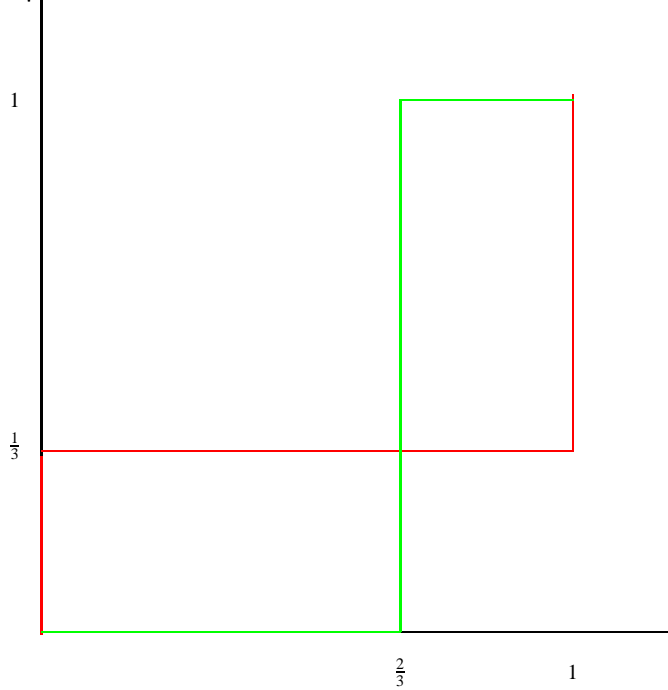
email: anna.torre@unipv.it

sito web del corso: www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2013.html

LA BATTAGLIA DEI SESSI

	II	L	R
I			
T		(2, 1)	(0, 0)
B		(0, 0)	(1, 2)

Ha due equilibri in strategie pure $:(T, L), (B, R)$ e uno in strategie miste: $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$ con valore atteso per entrambi i giocatori $\frac{2}{3} < 1$



Strategie correlate

Consideriamo un gioco in forma strategica: (X, Y, f, g) ,

- ▶ X è l'insieme (finito) delle strategie del primo giocatore
- ▶ Y è l'insieme (finito) delle strategie del secondo
- ▶ f è la funzione di utilità di I
- ▶ g è la funzione di utilità di II .

Come si riflette sul modello un accordo tra i due giocatori?

I giocatori possono decidere di giocare una coppia di strategie

$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$,


ma possono anche accordarsi su una strategia correlata μ su $X \times Y$.

Strategie correlate

- ▶ $\Delta(X)$ insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su X
- ▶ $\Delta(Y)$ insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su Y .
- ▶ e $\Delta(X \times Y)$ insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su $X \times Y$

Una **strategia correlata** è una distribuzione di probabilità su $X \times Y$.

Strategie correlate

		
	$\frac{1}{2}$	0
	0	$\frac{1}{2}$



è una distribuzione di probabilità su $X \times Y$ che non si può ottenere come prodotto di due distribuzioni di probabilità indipendenti su X e Y .

1. $p(1 - q) = 0$, $q(1 - p) = 0$ implica o $p = q = 0$ oppure $p = q = 1$
2. $pq = \frac{1}{2}$ è in contrasto con 1



Strategie correlate

- ▶ Se ogni giocatore sceglie una distribuzione di probabilità sul suo spazio di strategie e si considera la distribuzione di probabilità su $X \times Y$ che si ottiene dall'assunto che le due distribuzioni su X e Y siano indipendenti, si gioca in maniera non cooperativa.
- ▶ Se i giocatori possono accordarsi su una distribuzione di probabilità qualunque su $X \times Y$ significa dire che **sono ammessi accordi vincolanti**.

Strategie correlate

 		
	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$
	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$

con $0 \leq p_i \leq 1$ per ogni i $1 \leq i \leq 4$ e $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$
è una strategia correlata.

 	q	$1 - q$
p	pq	$p(1 - q)$
$1 - p$	$q(1 - p)$	$(1 - p)(1 - q)$

è una strategia mista. Le strategie miste sono strategie correlate ma non viceversa.

Strategie correlate

- ▶ $X = \{x_1, \dots, x_m\}$
- ▶ $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$,
- ▶ una strategia correlata p è una matrice p_{ij} , dove p_{ij} è la probabilità assegnata da p alla coppia di strategie pure (x_i, y_j) .
- ▶ L'utilità attesa del primo giocatore I , se viene “giocata” la strategia p , è:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} u_I(x_i, y_j)$$

- ▶ Questo è il valore atteso di u_I rispetto alla distribuzione di probabilità p su $X \times Y$. Possiamo indicarlo con: $E_p(u_I)$.
- ▶ Indichiamo il valore atteso di u_{II} con $E_p(u_{II})$.

Data la strategia p , $(E_p(u_I), E_p(u_{II}))$ è una coppia di numeri reali.

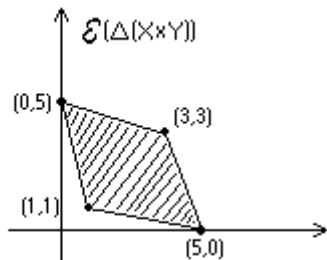
Abbiamo quindi una funzione :

$\mathcal{E} : \Delta(X \times Y) \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Ci interessa l'**immagine** di \mathcal{E} , cioè $\mathcal{E}(X \times Y)$. Essa è l'involucro convesso dell'insieme

$$\{(u_I(x_i, y_j), u_{II}(x_i, y_j)) : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$$

Dilemma del prigioniero

I \ II	S	T
S	(3, 3)	(0, 5)
T	(5, 0)	(1, 1)



EQUILIBRI CORRELATI

Consideriamo la battaglia dei sessi:

	I \ II	L	R
T		(2, 1)	(0, 0)
B		(0, 0)	(1, 2)

Se i due giocatori hanno la possibilità di comunicare tra loro e di correlare le loro strategie sembra ragionevole pensare che potrebbero decidere che si lancia una moneta e che se viene testa giocano entrambi S , se viene croce giocano entrambi T .

Questo accordo (di lanciare la moneta) permette a entrambi di avere una utilità attesa di $\frac{3}{2}$ e risulta essere stabile in quanto nessuno dei due ha interesse a deviare perché l'accordo prevede comunque di giocare un equilibrio di Nash.

EQUILIBRI CORRELATI

Aumann, Robert (1974) Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics* 1:67-96.

Ma in certi casi si può fare anche di più. Consideriamo il seguente gioco in forma strategica:

<i>I</i> \ <i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	(6, 6)	(2, 7)
<i>B</i>	(7, 2)	(0, 0)

- ▶ Due equilibri in strategie pure (B, L) e (T, R) e uno in strategie miste $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ con payoff atteso per entrambi i giocatori di $\frac{14}{3}$.
- ▶ Se i due giocatori potessero accordarsi nel giocare (T, L) , (B, L) e (T, R) con probabilità $\frac{1}{3}$ ciascuno, il payoff atteso sarebbe $\frac{15}{3}$: si eliminerebbe lo spreco di buttare una quota di probabilità su (B, R) che dà payoff 0.
- ▶ ma se i giocatori devono poi giocare indipendentemente, poiché (T, L) non è un equilibrio di Nash, l'accordo risulta non essere stabile. Questo accordo si può ottenere in maniera stabile se si ha a disposizione un mediatore affidabile.

IL RUOLO DEL MEDIATORE

- ▶ Il compito del mediatore è quello di rendere stabile la scelta di giocare con probabilità $\frac{1}{3}$ ciascuno dei tre (T, L) , (B, L) e (T, R) .
- ▶ Il mediatore compie un esperimento casuale con tre risultati ciascuno di probabilità $\frac{1}{3}$ (per esempio lancia un dado e se esce 1 o 2 opta per (T, L) , se esce 3 o 4 opta per (T, R) , se esce 5 o 6 opta per (B, L))
- ▶ Ma (e questa è l'idea che fa funzionare la faccenda) **non rende pubblica ai due giocatori l'uscita del dado, bensì comunica a ciascuno separatamente quello che lui deve giocare.** Per esempio se è uscito 1 lui dice al giocatore I di giocare T e al giocatore 2 di giocare L .
- ▶ In tal modo il giocatore I non sa se alla fine giocando T si troverà in (T, L) o in (T, R) e analogamente il giocatore II non sa se se alla fine giocando L si troverà in (T, L) o in (B, L) .

IL MEDIATORE NON HA POTERE DI OBBLIGARE

Supponiamo allora che il mediatore dica T al primo giocatore e L al secondo giocatore senza rendere pubblica questa informazione, cioè comunicando a ciascuno solo quanto di sua pertinenza. Il giocatore I in questo modo non ha interesse a deviare, perchè se non devia ha un valore atteso di $\frac{6+2}{2} = 4$ e se devia ha un valore atteso di $\frac{7+0}{2}$ che è minore. Infatti dopo la comunicazione che deve giocare T il giocatore I attribuisce probabilità $\frac{1}{2}$ al fatto che il mediatore voglia far giocare (T, L) e probabilità $\frac{1}{2}$ al fatto che il mediatore voglia far giocare (T, R) .

Equilibri correlati

Sia $G = (X, Y, f, g)$ un gioco in forma strategica finito a due giocatori, e supponiamo che ciascuno dei due abbia a disposizione due strategie (nel caso di n strategie la generalizzazione è ovvia), dove $X = \{x_1, x_2\}$ e $Y = \{y_1, y_2\}$ e $f, g : X \times Y \rightarrow R$. Un equilibrio correlato è una distribuzione di probabilità su $X \times Y$ tale che, detta $p_{i,j}$ la probabilità assegnata a (x_i, y_j) , si ha :

$$p_{1,1}f(x_1, y_1) + p_{1,2}f(x_1, y_2) \geq p_{1,1}f(x_2, y_1) + p_{1,2}f(x_2, y_2)$$

$$p_{2,1}f(x_2, y_1) + p_{2,2}f(x_2, y_2) \geq p_{2,1}f(x_1, y_1) + p_{2,2}f(x_1, y_2)$$

$$p_{1,1}g(x_1, y_1) + p_{2,1}g(x_2, y_1) \geq p_{1,1}g(x_1, y_2) + p_{2,1}g(x_2, y_2)$$

$$p_{1,2}g(x_1, y_2) + p_{2,2}g(x_2, y_2) \geq p_{1,2}g(x_1, y_1) + p_{2,2}g(x_2, y_1)$$

Equilibri correlati

Le relazioni si possono scrivere anche nel modo seguente:

$$\frac{p_{1,1}}{p_{1,1} + p_{1,2}}f(x_1, y_1) + \frac{p_{1,2}}{p_{1,1} + p_{1,2}}f(x_1, y_2) \geq \frac{p_{1,1}}{p_{1,1} + p_{1,2}}f(x_2, y_1) + \frac{p_{1,2}}{p_{1,1} + p_{1,2}}f(x_2, y_2)$$

$$\frac{p_{2,1}}{p_{2,1} + p_{2,2}}g(x_2, y_1) + \frac{p_{2,2}}{p_{2,1} + p_{2,2}}g(x_2, y_2) \geq \frac{p_{2,1}}{p_{2,1} + p_{2,2}}g(x_1, y_1) + \frac{p_{2,2}}{p_{2,1} + p_{2,2}}g(x_1, y_2)$$

Il primo membro della prima disequazione rappresenta il payoff atteso del primo giocatore dopo che il mediatore gli ha comunicato di giocare la prima strategia nell'ipotesi che lui rispetti l'indicazione, mentre il secondo membro rappresenta il payoff atteso dopo che il mediatore gli ha comunicato di giocare la prima strategia se lui non rispetta l'indicazione. Naturalmente occorre osservare che la probabilità viene aggiornata bayesianamente rispetto all'indicazione del mediatore.

Il principio è lo stesso usato per la definizione di equilibrio di Nash, cioè richiedere la stabilità rispetto a deviazioni unilaterali.

Ogni equilibrio di Nash è un equilibrio correlato (sia gli equilibri in strategie pure che agli equilibri in strategie miste).

Per il dilemma del prigioniero niente di nuovo

Nel dilemma del prigioniero

<i>I</i> \ <i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	(5, 5)	(0, 6)
<i>B</i>	(6, 0)	(1, 1)

la coppia di strategie (T, L) non è un equilibrio correlato. Questo significa che la distribuzione di probabilità che assegna 1 a (T, L) e 0 a tutte le altre uscite del gioco non è un equilibrio correlato.

GIOCHI RIPETUTI: COLLUSIONE

- ▶ Sorgere spontaneo della cooperazione.
- ▶ Siamo in un contesto istituzionale non cooperativo
- ▶ Non si possono assumere accordi vincolanti.

GIOCHI RIPETUTI: COLLUSIONE

- ▶ Se un gioco viene giocato un'unica volta non c'è alcun motivo per cooperare se non c'è un contratto scritto.
- ▶ Se il gioco viene ripetuto “non cooperare” a un certo stadio del gioco potrebbe significare che negli stadi successivi l'altro giocatore potrebbe non cooperare più.

L'incentivo alla cooperazione è più forte. Si tratta di vedere

come si costruisce una norma sociale.

Orizzonte temporale finito o infinito

- ▶ I comportamenti saranno diversi se i giocatori hanno un orizzonte temporale breve o un orizzonte temporale lungo (infinito).
- ▶ La differenza tra orizzonte finito e infinito è più una differenza di percezione della durata del gioco da parte dei giocatori che non una situazione effettivamente reale.
- ▶ Un modello di orizzonte finito è più ragionevole quando i giocatori percepiscono chiaramente il periodo finale, mentre quello con orizzonte infinito quando i giocatori dopo ogni periodo pensano che il gioco continuerà per un periodo ancora.
- ▶ Altrimenti, visto che la vita è finita, potremmo modellizzare solo orizzonte finito.

Orizzonte temporale finito

- ▶ se il gioco possiede un solo equilibrio di Nash, il gioco ripetuto con orizzonte temporale finito ha un unico equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi che consiste nel giocare ad ogni passo la strategia di equilibrio
- ▶ Se il gioco ha più di un equilibrio di Nash, allora il gioco ripetuto può avere degli equilibri di Nash perfetti nei sottogiochi in cui in qualche passo i giocatori non giocano una strategia di equilibrio del gioco componente.

Orizzonte temporale finito

Si consideri la seguente modifica del dilemma del prigioniero:

<i>I</i> \ <i>II</i>	<i>S</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	(5, 5)	(1, 6)	(0, 0)
<i>M</i>	(6, 1)	(2, 2)	(0, 0)
<i>B</i>	(0, 0)	(0, 0)	($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$)

Gli equilibri di Nash sono (M, M) e (B, D) . In realtà le vincite migliori per entrambi i giocatori sono quelle relative alle strategie (A, S) dove entrambi ottengono 5.

Supponiamo ora di ripetere il gioco due volte.

Notiamo per prima cosa che le strategie di ciascun equilibrio giocate entrambe le volte costituiscono un equilibrio di Nash e quindi nel gioco ripetuto si ritrovano gli equilibri di Nash del gioco di partenza. Tali equilibri sono anche perfetti nei sottogiochi

Consideriamo il seguente profilo di strategie:

- ▶ Primo giocatore: Scelgo A nel primo periodo, nel secondo scelgo M se nel primo periodo le azioni osservate sono (A, S) , altrimenti scelgo B .
- ▶ Analoga strategia per il secondo giocatore.

In questo caso si ottiene ancora un equilibrio perfetto nei sottogiochi. Per verificarlo occorre considerare 9 sottogiochi nel secondo periodo, ciascuno corrispondente di una delle 9 coppie di strategie possibili nel primo gioco.

Orizzonte temporale infinito

Se un gioco viene ripetuto infinite volte si possono ottenere risultati differenti; in particolare acquistano rilevanza i concetti di minaccia e di punizione, come e più che nel caso di orizzonte finito con più equilibri di Nash. Ad esempio se il dilemma del prigioniero è ripetuto infinite volte non si può applicare il ragionamento basato sull'induzione a ritroso, per cui la minaccia **“se non cooperi io non coopererò mai più”** acquista un peso diverso.

Vediamo un esempio sempre riferito al dilemma del prigioniero.

Supponiamo che entrambi i giocatori adottino la seguente strategia:

- ▶ **T** “Nel primo periodo scelgo T e successivamente scelgo T se e solo se in tutti i periodi precedenti ho osservato (T,L), in caso contrario da quel momento in poi scelgo B.”
- ▶ **T** “Nel primo periodo scelgo L e successivamente scelgo L se e solo se in tutti i periodi precedenti ho osservato (T,L), in caso contrario da quel momento in poi scelgo R.”

Calcoliamo le vincite di ciascun giocatore.

Se entrambi scelgono la strategia **T** sopra scritta ottengono :

$$u_I(T) = u_{II}(T) = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + 5\delta^3 + \dots = 5 \frac{1}{1-\delta}$$

Se I adotta un'altra strategia D_i che al passo i -esimo gli fa scegliere C per la prima volta, e II adotta **T**, ottiene

$$u_I(D_i) = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + \dots + 5\delta^{i-1} + 6\delta^i + 2\delta^{i+1} \dots = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + \dots + 5\delta^{i-1} + 6\delta^i + 2\delta^{i+1} \frac{1}{1-\delta}$$

Si ha

$$u_I(D_i) \leq u_I(T) \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{6}$$

$$\text{infatti: } u_I(D_i) \leq u_I(T) \Leftrightarrow 6\delta^i + 2\delta^{i+1} \frac{1}{1-\delta} \leq 5\delta^i + 5\delta^{i+1} \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{6}$$

Analogo discorso si può fare per II.

Quindi, se il tasso di sconto è maggiore di $\frac{1}{6}$, la coppia di strategie (T, T) è un equilibrio di Nash e si potrebbe vedere che è anche perfetto nei sottogiochi..

Analogo risultato si può ottenere se il tasso di sconto viene invece interpretato come la probabilità che un gioco di durata aleatoria prosegua da un dato stadio al successivo.