Teoria dei Giochi

Anna Torre

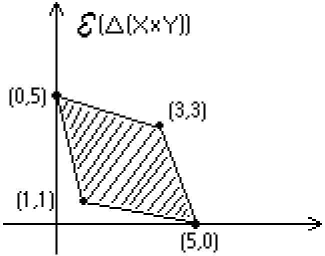
Almo Collegio Borromeo 21 marzo 2013

email: anna.torre@unipv.it

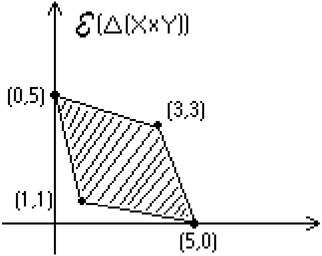
sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2013.html

Dilemma del prigioniero

I \ II	S	T
S	(3, 3)	(0, 5)
T	(5, 0)	(1, 1)



Questo corrisponde a vedere il modello dal punto di vista cooperativo



Ma se vogliamo cooperare e abbiamo a disposizione un mediatore su cosa ci accorderemo?

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Diremo che un problema di contrattazione è una coppia (F, d), dove:

- $F \subseteq R^2$, chiuso e convesso
- $d \in R^2$

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

F rappresenta l'insieme di tutte le coppie di valori di utilità ai quali i due giocatori possono pervenire,

$d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ rappresenta il "punto di disaccordo",cioè il valore che i giocatori possono ottenere in caso di mancato raggiungimento di un accordo.

Un problema di contrattazione è una coppia (F, d).

In particolare $F = \mathcal{E}(\Delta(X \times Y))$ e $d = (v_I, v_{II})$.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Formalizziamo il problema di contrattazione.
Indichiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme dei problemi di contrattazione dei quali ci occupiamo. Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono coppie (F, d), dove:

1. F è un sottoinsieme di R^2, chiuso e convesso
2. $d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in R^2$
3. $F \cap \{(u_1, u_2) \in R^2 : u_1 \geq \bar{u}_1$ e $u_2 \geq \bar{u}_2\}$ è non vuoto e limitato

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Se in F c'è un elemento (u_1, u_2) con $u_1 > \bar{u}_1$ e $u_2 > \bar{u}_2$, allora il problema di contrattazione (F, d) viene detto *essenziale*.
Per *soluzione* del problema di contrattazione (relativamente alla classe $\mathcal{B}$ sopra individuata) intendiamo una applicazione Φ definita su $\mathcal{B}$ a valori in R^2.
L'idea è che ad ogni (F, d) siamo in grado di associare (univocamente!) una coppia $\Phi(F, d) = (\Phi_1(F, d), \Phi_2(F, d))$ che rappresenti, in termini interpretativi, i valori di utilità assegnati rispettivamente ai due giocatori.
Come definire questa Φ?

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

L'approccio seguito da Nash non è stato quello di definire "a priori" Φ, ma di imporre condizioni "ragionevoli" che ogni soluzione Φ dovrebbe soddisfare.
E poi di provare che c'è una ed una sola Φ che soddisfa tali condizioni.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Queste condizioni sono le seguenti:

- **Efficienza forte**: $\Phi(F,d) \in F$ ed è un ottimo paretiano forte per F, cioè in F non esiste alcun elemento con entrambe le coordinate maggiori o uguali di quelle di $\Phi(F,d) \in F$ e con almeno una coordinata strettamente maggiore.
- **Razionalità individuale**: $\Phi_1(F,d) \geq \bar{u}_1$ e $\Phi_2(F,d) \geq \bar{u}_2$
- **Co-varianza rispetto a cambiamenti di scala**: Per ogni $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2 \in R$ t.c. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, siano:

  $F' = \{(\lambda_1 u_1 + \gamma_1, \lambda_2 u_2 + \gamma_2) : (u_1, u_2) \in F\}$ e $d' = (\lambda_1 \bar{u}_1 + \gamma_1, \lambda_2 \bar{u}_2 + \gamma_2)$

  Allora

  $$\Phi(F', d') = (\lambda_1 \Phi_1(F,d) + \gamma_1, \lambda_2 \Phi_2(F,d) + \gamma_2)$$

- **Indipendenza dalle alternative irrilevanti**: Sia dato (F, d) e sia $G \subseteq F$, G chiuso e convesso, t.c. $\Phi(F, d) \in G$. Allora $\Phi(F, d) = \Phi(G, d)$
- **Simmetria**: Se $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ e se $(u_1, u_2) \in F \Leftrightarrow (u_2, u_1) \in F$, allora $\Phi_1(F, d) = \Phi_2(F, d)$

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Si può allora enunciare il seguente: Teorema (Nash 1951)
C'è una ed una sola soluzione Φ, definita su $\mathcal{B}$, che soddisfa le condizioni 1), ..., 5). Inoltre, se (F, d) è essenziale, si ha che:

$$\Phi(F, d) = \text{argmax } (u_1 - \bar{u}_1)(u_2 - \bar{u}_2) \text{ con } (u_1, u_2) \in F, u_1 \geq \bar{u}_1, u_2 \geq \bar{u}_2$$

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Analisi degli assiomi Il teorema di Nash è in grado di mettere d'accordo chiunque si trovi in una situazione come quella di sopra ed accetti le sue condizioni per un'equa spartizione.

Il primo assioma vuol mettere in luce un criterio di efficienza: non ha senso accontentarsi di un risultato, se entrambi i giocatori possono fare meglio. Dunque, anche ammettendo che i giocatori possano distruggere utilità, questo non può accadere all equilibrio.

Il terzo assioma è detto di invarianza rispetto a trasformazioni di utilità. Dice che se cambiamo unità di misura all'utilità del giocatore (i fattori h e k) e aggiungiamo certe quantità iniziali, il risultato cambia tenendo conto esattamente dei fattori precedenti.

Non cambia il risultato se lo si esprime in euro o in dollari (pur di esprimerlo sempre in euro o in dollari) e cambia delle stesse quantità se spostiamo i livelli zero di utilità.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Il quarto è chiamato indipendenza dalle alternative irrilevanti: se aggiungere a C, che è l'insieme delle utilità che i giocatori si possono garantire nella contrattazione, altri elementi, che portano a costruire un insieme più grande C', porta come risultato a una situazione che già era in C, allora quest'ultima è già la soluzione per il gioco C. (Notare che il punto di disaccordo è lo stesso in entrambi i giochi). In altre parole, quello che abbiamo aggiunto a C non sono che alternative irrilevanti, appunto.

Il quinto, detto assioma di simmetria, è molto chiaro: significa che in un gioco simmetrico il risultato deve essere simmetrico. Se i giocatori sono indistinguibili dal punto di vista delle loro utilità e dal punto di partenza, il risultato deve essere lo stesso per ambedue.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Il modello di contrattazione di Nash è certamente molto interessante. Non è certo esente da critiche, però. Vediamo ora alcuni problemi che sono emersi rappresentando una critica all'approccio assiomatico di Nash:

- Come si sceglie il punto d? Non è facile fare una scelta se il gioco dato non è cooperativo. In realtà ci sono vari approcci: il max-min, un equilibrio di Nash,...
- analogamente, il "feasibility set" F è individuato con certezza? ogni F con le caratteristiche date (convesso, etc.) è un "feasibility set" per un qualche problema di contrattazione? O ve ne sono alcuni che non si posssono ottenere in questo modo?

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

- altre informazioni, oltre a quelle previste (e cioè (F, d)), rappresentate in termini di valori di utilità, non hanno alcun rilievo in un problema di contrattazione? Non saremmo disposti a modificare le nostre opinioni se avessimo informazioni supplementari?
- per quale motivo Φ deve essere un “singleton”? Ad esempio, un gioco strategico non ha in genere un unico equilibrio di Nash
- un’altra obiezione è più generale ed è una obiezione di fondo all’approccio assiomatico. Perchè mai determinare una soluzione su una classe di giochi quando si ha a che fare con un gioco concreto? Dietro a questa impostazione c’è l’idea di una validità normativa. Ma anche da questo punto di vista la classe dei giochi che posso aspettarmi di giocare è assimilabile all’insieme dei problemi di contrattazione su cui si ha l’assiomatizzazuione di Nash?

Critiche (Modello di Nash, 1951)

1. Quello sopra delineato **non è l'unico modo possibile** per trasformare un gioco strategico in un problema di contrattazione. In particolare, si possono impiegare altri approcci per identificare il punto di disaccordo.
2. l'approccio seguito può essere criticato per essere troppo rigidamente "welfarista". Con il modello che consideriamo, assumiamo che l'insieme F (con la sua interpretazione canonica, quale insieme delle coppie di valori di utilità sui quali i giocatori contrattano) rappresenti, assieme a d, **tutte le informazioni rilevanti**.
3. Ciò può non essere vero. Solo per fare un esempio, aspetti procedurali possono essere importanti e naturalmente in questo approccio non possono emergere in modo esplicito .

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

- In alcuni casi la soluzione dettata dal modello non è equa. Per esempio, se la spartizione della somma avviene tra due persone (I e II) la cui funzione di utilità assume i seguenti valori:

Moneta di I	Moneta di II	Utilità di I	Utilità di II	Prodotto
0	100	0.00	1.00	0.00
25	75	0.25	0.98	0.245
50	50	0.50	0.90	0.450
75	25	0.75	0.73	0.548
100	0	1.00	0.00	0.00

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

la soluzione di Nash offre 75 a I e 25 a II. Cio è eticamente ingiusto. In realtà la funzione di utilità dichiarata da I è la funzione dichiarabile da un “ricco”, mentre l’utilità dichiarata da II è più probabile per un “povero”.
Certamente sul piano etico siamo portati a pensare che sarebbe meglio dare di più al povero.
Ma l’ingiustizia non sembra essere nel modello di contrattazione, bensì nelle funzioni di utilità che vengono dichiarate dai due.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Le critiche più significative sono state fatte all'assioma dell'indipendenza dalle alternative irrilevanti. In effetti può non sembrare sensato che di fronte a nuove alternative la soluzione non debba mai cambiare. Nuove alternative possono cambiare la forza contrattuale di chi da queste viene privilegiato.

Teorema di Arrow 1951)

Teorema di Arrow (1951)
Dato un insieme di alternative Γ e un insieme N di n individui e l'insieme $\mathcal{P}$ dei preordini totali su Γ definiamo **regola di determinazione delle scelte collettive**, una funzione

$$P : \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \ldots \times \mathcal{P}}_{n \text{ volte}} \to \mathcal{P} \tag{1}$$

Teorema di Arrow 1951)

Chiameremo **sistema di preferenze collettivo** $\succeq_N$ il valore che la funzione P assume in corrispondenza della n-upla di prefernze $(\succeq_i)_{i \in N}$ su Γ.
Un elemento $(\succeq_i)_{i \in N}$ di $\mathcal{P}^n$ verrà detto profilo di preferenze.

Condizioni imposte:

- **Unanimità** Diciamo che la regola P rispetta la **condizione dell'unanimità** se $\forall x, y \in \Gamma,\ \forall\ (\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{P}^n \quad \Big([\forall h \in \{1,2,\ldots,n\} \quad (x \succeq_h y)] \Rightarrow (x \succeq_N y)\Big)$ dove $\succeq_N$ è l'ordinamento collettivo ottenuto da P a partire da $(\succeq_h)_{h\in N}$.
- **Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti** Diciamo che la regola per la scelta collettiva P è **indipendente dalle alternative irrilevanti** se $\forall x, y \in \Gamma \quad \Big([\forall h \in \{1,2,\ldots,n\} \quad (x \succeq_h y) \Leftrightarrow (x \sqsupseteq_h y)] \Rightarrow [(x \succeq_N y) \Leftrightarrow (x \sqsupseteq_N y)]\Big) \qquad \forall\ (\succeq_h)_{h\in N}, (\sqsupseteq_h)_{h\in N} \in \mathcal{P}^n$ dove $\succeq_N$ e $\sqsupseteq_N$ sono gli ordinamenti collettivi ottenuti da P a partire rispettivamente da $(\succeq_h)_{h\in N}$ e $(\sqsupseteq_h)_{h\in N}$.

Teorema di Arrow 1951)

- **Dittatorialità** Diciamo che la regola per la scelta collettiva P rispetta la **condizione di dittatorialità** se $\exists \tilde{h} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $P(\succeq_1, \ldots, \succeq_{\tilde{h}}, \ldots, \succeq_n) = \succeq_{\tilde{h}} \quad \forall \quad (\succeq_h)_{h \in N} \in \mathcal{P}^n$ cioè $\succeq_{\tilde{h}}$, che rappresenta il sistema di preferenze del giocatore $\tilde{h}$, coincide con l'ordinamento collettivo $\succeq_N$ ottenuto da P a partire da $(\succeq_h)_{h \in N}$.

Teorema di Arrow 1951

Dato un insieme N di n agenti e un insieme di alternative Γ con almeno tre elementi, una regola di determinazione della scelta collettiva P che rispetti le condizioni 1 e 2 è dittatoriale.

Teorema di Arrow 1951

Regola della maggioranza semplice:

Condorcet (1785)

Si verifica facilmente che $\succeq_N$ non è transitiva.

$$\left.\begin{array}{c} x \succ_a y \succ_a z \\ y \succ_b z \succ_b x \\ z \succ_c x \succ_c y \end{array}\right\}$$

Si deduce che:

$$x \succ_N y \succ_N z \succ_N x$$

Metodo del conteggio di Borda (1791)

Dato un insieme di alternative Γ e un consesso decisionale costituito da un insieme N di n individui, il metodo di conteggio di Borda definisce che per ogni agente in N vengano elencati nell'ordine di preferenza gli elementi di Γ e vengano attribuiti il punteggio di 1 all'ultimo (quello che non è strettamente preferito ad alcuna alternativa in Γ), 2 al penultimo e così via.
La somma dei punteggi ottenuti dai vari elementi in Γ fornisce la classificazione collettiva tra le alternative in Γ.

Metodo del conteggio di Borda

$N = \{1, 2, 3\}$ $\Gamma = \{a, b, c, d, e, \}$

$a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 d \succ_1 e$

$a \succ_2 b \succ_2 c \succ_2 d \succ_2 e$

$c \succ_3 d \succ_3 e \succ_3 a \succ_3 b$

	a	b	c	d	e
1	5	4	3	2	1
2	5	4	3	2	1
3	2	1	5	4	3
totale	12	9	11	8	5

L'alternativa scelta è la a.

Metodo del conteggio di Borda (1791)

Supponiamo ora che venga eliminata l'alternativa b(o messa per ultima da tutti i decisori). In tal caso la tabella diventa:

	a	c	d	e
1	4	3	2	1
2	4	3	2	1
3	1	4	3	2
totale	9	10	7	4

In questo caso viene scelta l'alternativa c (si osservi che a era sempre preferito a b).

BIBLIOGRAFIA

Arrow KJ (1951) Social choice and individual values. Wiley, New York

Nash, John F. Jr. [1950]: Equilibrium Points in n-Person Games, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36, 48-49.

Nash, John F. Jr. [1950]: The Bargaining Problem, Econometrica, 18, 155-162.

Nash, John F. Jr. [1951]: Non-Cooperative Games, Ann. of Math., 54, 286-295.

Nash, John F. Jr. [1953]: Two-Person Cooperative Games, Econometrica, 21, 128-140