Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 18 aprile 2013

email: anna.torre@unipv.it

sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2013.html

Giochi coooerativi ad utilità trasferibile

Detti anche giochi (cooperativi) a pagamenti laterali o TU-games.

- N é un insieme di giocatori;
- C ’é una scala comune di misura per le funzioni di utilità;
- Le possibili coalizioni si possono procurare una certa utilità e in seguito spartirsela all’interno come preferiscono.

Giochi coooerativi ad utilità trasferibile

- N = $\{1, ..., n\}$
- $P(N)$ é l'insieme dei sottoinsiemi di N: I sottoinsiemi S di N ($S \subseteq N$) vengono detti **coalizioni**.
- $v : P(N) \longrightarrow R$ una applicazione tale che $v(\emptyset) = 0$.

Gioco a pagamenti laterali: La coppia (N, v) si dice "gioco a pagamenti laterali". Interpretazione:

- N **è l'insieme dei giocatori;**
- **Ogni gruppo di giocatori $S \subseteq N$ è in grado di garantirsi una somma di denaro $v(S)$;**
- **Se $S = \emptyset$ (cioè non contiene elementi) $v(S)$ é uguale a zero.**

Nucleo

Sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali.
Il nucleo di G è l'insieme di tutte le allocazioni di R^n che soddisfano alle seguenti condizioni:

- $\Sigma_{i \in S} X_i \geq v(S)$ per ogni $S \subseteq N$,
- $\Sigma_{i \in N} X_i \leq v(N)$,

Giochi semplici

- In Sociologia e nelle Scienze Politiche, i giochi cooperativi ad utilità trasferibile sono stati utilizzati per studiare svariati contesti decisionali che comprendono al loro interno uno scrutinio elettorale.
- È dato insieme N di n "giocatori".
- una regola la quale dice quale requisito debba soddisfare un gruppo di giocatori per essere in grado di far passare una decisione.
- è naturale pensare ad un gioco in cui ogni gruppo è o vincente o perdente, nel senso che o ottiene di far passare la propria decisione o non ottiene di farla passare.
- L'idea è quella di costruire un gioco in cui ogni coalizione S è o vincente $(v(S) = 1)$ o perdente $(v(S) = 0)$, $v : P(N) \longrightarrow \{0, 1\}$.

Gioco semplice

Un gioco a pagamenti laterali (N, v) si dice semplice se:
$\forall S \subseteq N,\ v(S) = 1$ oppure $v(S) = 0$ cioè $v : P(N) \longrightarrow \{0, 1\}$ e inoltre $v(N) = 1$

Gioco semplice

- L'interpretazione è che la coalizione S che ha valore 1 possa decidere sul problema senza l'aiuto dei giocatori al di fuori di S.
- Per questo motivo, queste coalizioni sono chiamate vincenti.
- Si noti che nella definizione di gioco semplice, la coalizione N di tutti i giocatori è in grado di aggiudicarsi 1.

Consiglio dell'ONU

Sia $N = \{1, ..., 15\}$ l'insieme dei membri dell'ONU, di cui 5 sono permanenti, mentre gli altri non sono permanenti. Una coalizione $S \subseteq N$ è "vincente" se

$\{1, ..., 5\} \subseteq S$

$|S| \geq 9$

Come è fatto il nucleo di questo gioco?

Giocatore di veto

L'esempio sul Consiglio dell'ONU ci permette di introdurre un altro concetto connesso ai giochi semplici, quello di giocatore di veto. Gli stati permanenti del Consiglio di Sicurezza hanno infatti la possibilità di porre il loro veto alle scelte decisionali del Consiglio stesso. Questa proprietà nei termini formali della teoria si traduce nella seguente definizione:
"giocatori di veto". Sia $G = (N, v)$ un gioco semplice. Un elemento $i \in N$ si dice giocatore di veto se
$\forall S \subseteq N \; i \notin S \Longrightarrow v(S) = 0$

Giocatori di veto

Dato un gioco semplice $G = (N, v)$, il suo nucleo è non vuoto se e solo se c'è almeno un giocatore di veto.

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Si supponga che v non abbia giocatori di veto. Allora, per ogni $i \in N$, esiste una coalizione $S \subseteq N$ tale che $i \notin S$ e $v(S) = 1$. Per un'imputazione X che sta nel nucleo, abbiamo che:

$\Sigma_{j \in N} X_j = v(N) = 1$

$\Sigma_{j \neq i} X_j \geq \Sigma_{j \in S} X_j \geq v(S) = 1$

Quindi $X_i = 0$ per ogni $i \in N$, e perciò X non può essere un'imputazione. Questa contraddizione prova che il nucleo è vuoto.

Giocatori di veto

$(\Leftarrow)$ Si supponga ora che v abbia almeno un giocatore di veto. Sia S l'insieme di tali giocatori di veto $|S| \geq 1$) Sia X un' allocazione tale che
$\Sigma_{i \in S} X_i = 1$
con $X_i \geq 0 \ \forall i \in S$ e $X_i = 0$ per $i \notin S$
Se T è una coalizione vincente, $S \subseteq T$ e poichè la somma delle componenti dell'allocazione in S deve essere pari ad 1 si ottiene
$\Sigma_{i \in T} X_i \geq \Sigma_{i \in S} X_i = v(T)$
quindi X rispetta la razionalità intermedia per ogni $T \subset N$ oltre che quella individuale e collettiva. Quindi X appartiene al nucleo.

VALORE SHAPLEY per Giochi cooperativi ad utilità trasferibile.

- Il nucleo non ci offre "la" soluzione, ma un modo per scartare allocazioni che sarebbero instabili se $\Sigma_{i \in S} X_i < v(S)$.
- La coalizione S ha interesse a "defezionare" dalla grande coalizione N, se si insiste sulla ripartizione $(X_1, X_2, ..., X_n))$.

Valore Shapley

- Vi è un altro concetto di soluzione: si tratta del cosiddetto "Valore Shapley".
- Il modo usato da Shapley per introdurre il valore (Shapley) è quello di usare la strada "assiomatica" già usata da Nash per i problemi di contrattazione.
- Si chiede cioè quali proprietà "debba" soddisfare un ragionevole criterio allocazione di $v(N)$ tra i giocatori.

Valore Shapley

Indichiamo con $G(N)$ l'insieme di tutti i giochi che sono definiti sull'insieme di giocatori N. Diciamo "valore" una funzione
$\Phi : G(N) \longrightarrow \mathbf{R^n}$
dove $n = | N |$. A questo punto si elencano le proprietà (assiomi)

Anonimità

Un primo criterio, ovvio, è l'anonimità. Cioè, quanto viene dato ad un giocatore non deve dipendere da "chi è" questo giocatore (cioè, se si tratta di Marco o Enrico), ma solo da quanto il giocatore è in grado di ottenere da solo o con altri.

Esempio:

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(1, 2) = v(1, 3) = 4$; $v(2, 3) = 6$; $v(1, 2, 3) = 20$.

$w(1) = w(2) = w(3) = 0)$ $w(2, 3) = w(1, 3) = 4$; $w(1, 2) = 6$;

$w(1, 2, 3) = 20$.

Che differenza c'è tra il gioco v e quello w ? Che in w il giocatore 3 si trova nella identica situazione in cui il giocatore 1 si trovava nel gioco v. L'idea di anonimità richiede che noi diamo al giocatore 3, nel gioco w, esattamente quello che diamo al giocatore 1 nel gioco v.

Sia $N = \{1, 2, 3\}$. $\sigma : N \longrightarrow N$
$\sigma(1) = 3,\ \sigma(2) = 2,\ \sigma(3) = 1$. Se $S = \{1, 2\}$, abbiamo che
$\sigma(S) = \{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{3, 2\} = \{2, 3\}$.
Quindi, $\sigma v(1, 2) = v(2, 3)$. Se prendiamo $T = \{2, 3\}$, abbiamo che
$\sigma(T) = \{\sigma(2), \sigma(3)\} = \{2, 1\} = \{1, 2\}$.
Quindi, $\sigma v(2, 3) = v(1, 2)$. Il gioco $\sigma(v)$, essendo σ la permutazione
che stiamo considerando (quella che scambia l con 3).

Anonimità

L'idea è ovviamente di chiedere che: **Anonimità.**

Sia v un gioco e $\sigma : N \longrightarrow N$ una permutazione.

Allora, $\Phi_i(v) = \Phi_{\sigma(i)}(\sigma v)$

Nell'esempio $i = 1$. Allora $\sigma(1) = 3$. Vogliamo quindi che

$= \Phi_1(v) = \Phi_3(\sigma v) = \Phi_3(w)$.

Quello che viene assegnato al giocatore 1 nel gioco v, deve essere assegnato al giocatore 3 nel gioco w.

Efficienza.

Per ogni gioco v, $\Phi(v)$ è una pre-imputazione.
L'interpretazione di questo assioma è ovvia, deve essere $\Sigma_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$.
Il "valore" Φ deve ripartire tra i giocatori quello che riesce ad ottenere la grande coalizione.

Dummy player property.

Se in un gioco v il giocatore i è un "dummy player", allora $\Phi_i(V) = 0$.
Se S è una coalizione, ed $i \in S$, il numero reale $v(S \cup i) - v(S)$ viene detto contributo marginale di i alla coalizione S.
Se $i \in N$ è tale che $v(S \cup i) = v(S)$, allora i è un "dummy player" ("giocatore ininfluente"); assumiamo che in tale caso $\Phi_i(V) = 0$.

Giochi di Unanimità

Vediamo come questi assiomi determinano Φ su una particolare classe di giochi: i giochi di unanimità.

Data una coalizione $T \subseteq N \;\; T \neq T$, il gioco di unanimità u_T è il gioco definito come:

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad T \subseteq S, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Giochi di Unanimità

In un gioco di unanimità i giocatori che stanno in T hanno un ruolo simmetrico e analogamente i giocatori che stanno in $N \setminus T$, quindi Φ deve assegnare lo stesso valore h a tutti i giocatori che stanno in T e lo stesso valore k a tutti i giocatori che stanno in $S = N \setminus T$. Inoltre $ht + ks = n$ dove $t =| T |$ e $s =| N \setminus T$. Ma i giocatori di $S = N \setminus T$ sono tutti dummy, quindi $k = 0$ e quindi $h = \frac{n}{t}$. Dunque Φ è determinata su u_T dagli assiomi precedenti.

Assioma di Additività

Per dimostrare che Φ è univocamente definita su tutto $G(N)$ occorre l'assioma di additività:

Additività. $\Phi_i(v + w) = \Phi_i(v) + \Phi_i(w)$, per ogni $i \in N$.

Teorema di Shapley(1953)

Esiste ed è unica $\Phi : G(N) \longrightarrow R^n$ che soddisfa i 4 assiomi, inoltre si ha:

$\Phi_i(v) = \frac{1}{n!}\Sigma_\sigma m_i^\sigma(v)$ per ogni $i \in N$

Φ e detta valore Shapley del gioco.

Per capire la formula, dobbiamo sapere cosa vuol dire $m_i^\sigma(v)$. L'idea è semplice:
supponiamo che il giocatore 1 entri per primo: a lui verrà dato $v(1)$.
A questo punto entra il giocatore 2 e a lui viene dato $v(1,2) - v(1)$ cioè il suo valore marginale.
E così di seguito al giocatore 3 viene dato $v(1,2,3) - v(1,2)$
Ad ogni giocatore, entrando nella stanza, viene dato il suo contributo marginale alla coalizione che già si trovava nella stanza.

Non c'è ragione di privilegiare l'ordine $1, 2, 3, ...n$ in cui i giocatori entrano nella stanza . E quindi calcoliamo il valor medio di questi contributi marginali. Da qui la formula (ricordo che n! è il numero di permutazioni su un insieme di n elementi).
La formula data può naturalmente essere usata per clacolare il valore Shapley, però ha il difetto di richiedere una quantità di calcoli enorme, se il numero totale dei giocatori è grande. Si noti che ad esempio è 10! = 3.628.800 e quindi se abbiamo un gioco con l0 giocatori questo è' il numero di addendi della somma che dobbiamo calcolare applicando la formula. Se il gioco è "piccolo", la formula ci permette di calcolare il valore Shapley abbastanza facilmente.

gioco di Maggioranza

Valore Shapley per il gioco di maggioranza: $N = \{1, 2, 3\}$ e $v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, mentre $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$. Calcoliamo tutti i contributi marginali del giocatore 1:

Permutazioni	Contributi marginali	Calcolo
$1, 2, 3$	$v(1) - v(\emptyset)$	0
$1, 3, 2$	$v(1) - v(\emptyset)$	0
$2, 1, 3$	$v(1, 2) - v(2)$	1
$2, 3, 1$	$v(1, 2, 3) - v(2, 3)$	0
$3, 1, 2$	$v(1, 3) - v(3)$	1
$3, 2, 1$	$v(1, 2, 3) - v(2, 3)$	0

Quindi si ha $\Phi_1(v) = \frac{1}{3}$ e per simmetria:
$\Phi(v) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Consideriamo il gioco con $N = \{1, 2, 3\}$ definito da:
$v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(1, 2) = v(1, 3) = 4$; $v(2, 3) = 6$; $v(1, 2, 3) = 20$.

permutazioni\giocatori	1	2	3
123	0	4	16
132	0	16	4
213	4	0	16
231	14	0	6
312	4	16	0
321	14	6	0
totale	36	42	42
valore Shapley	6	7	7

Gioco dei Guanti			
permutazioni\giocatori	l	r_1	r_2
l $r_1 r_2$	0	1	0
l $r_2 r_1$	0	0	1
r_1 l r_2	1	0	0
$r_1 r_2$ l	1	0	0
r_2 l r_1	1	0	0
$r_2 r_1$ l	1	0	0
totale	4	1	1
valore Shapley	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Formula di Shapley Shubik

Per i giochi semplici c'è una formula per un calcolo più veloce del valore Shapley, ed è la seguente:

$\Phi_i(v) = \Sigma_{S \in P(i)} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$ per ogni $i \in N$

dove

$P(i) = \{S \subseteq N : \; i \in S, \; v(S) = 1, \; v(S - \{i|\})) = 0\}$

Il consiglio di sicurezza

Applichiamo la formula di Shapley- Shubik. In questo caso i giocatori sono 15. Sia i uno stato senza potere di veto: una coalizione $S \in P(i)$ soddisfa le condizioni $v(S) = 1$ e $v(S - \{i\}) = 0$ se e solo se:

- S ha 9 stati
- S contiene i
- S contiene i 5 stati con potere di veto

Le coalizioni con la proprietà detta sono:
$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$
Quindi $\Phi_i(v) = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(9-1)! \cdot (15-9)!}{15!} = \frac{4}{2145}$

Struttura di coalizioni: grafo

- N è l'insieme dei giocatori.
- Un grafo su N è un insieme g di coppie non ordinate di elementi distinti di N.
- Chiameremo queste coppie lati. Indicherò con $[i, j]$ il lato che congiunge i e j.
- L'idea è che i giocatori non possono cooperare se non c'è una serie di collegamenti bilaterali tra di essi.

Struttura di coalizioni: grafo

- Sia $S \subseteq N$ Diremo che i e j sono connessi in S tramite il grafo g se c'è un cammino in g che va da i a j ed è tutto contenuto in S.
- Dato g e $S \subseteq N$ esiste una unica partizione di S tale che ogni elemento della partizione contiene elementi connessi in S tramite g.
- Indichiamo questa partizione con S/g

Struttura di coalizioni: grafo

Esempio:

- $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}, g = \{[1, 2], [1, 4], [2, 4], [3, 4]\}$
- $\{1, 2, 3\}/g = \{\{1, 2\}\{3\}\}$
- $N/g = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}\}$

Che ruolo gioca la struttura del grafo?

Sia $< N, v >$ un gioco a pagamenti laterali e g un grafo i cui vertici sono N. La terna $(< N, v >, g)$ si chiama gioco cooperativo con comunicazione ristretta. Definiamo gioco di comunicazione associato a $(< N, v > g)$ il gioco sosì definito:

$v/g(S) = \Sigma_{T \in S/g} v(T)$

Il valore Myerson di $< N, v >, g$ non è altro che il valore Shapley del gioco così definito.

Esempio

Sia

- $N = \{1, 2, 3, 4\}$ con
- $v(T) = 2$ se $\{1, 2\} \subseteq T, |T| \leq 3$
- $v(N) = 4$
- $v(T) = 0$ negli altri casi.

Se si considera il grafo di comunicazione $g = \{[1, 2]\}$,
Il gioco di comunicazione associato $< N, v/g >$ sarà:

- $v/g(T) = 2$ se $\{1, 2\} \subseteq T$
- $v/g(T) = 0$ negli altri casi.

Esempio

Se si considera il grafo di comunicazione $g = \{[1,3],[2,3]\}$, il gioco di comunicazione associato a $< N, v/g >$ sarà:

- $v/g(T) = 2$ se $\{1,2,3\} \subseteq T$
- $v/g(T) = 0$in ogni altro caso.

Esempio

Se il grafo di comunicazione è $g = \{[1,3],[3,4]\}$, il gioco di comunicazione associato a $< N, v/g >$ è
$v/g(T) = 0$ per qualunque coalizione $T \subseteq N$

Assiomi

- $g^N = \{[i,j] : \ i \in N, j \in N, i \neq j\}$
- $GR = \{g : \ g \subseteq g^N\}$

1. **Una regola di allocazione** è una funzione $Y : GR \to R^N$ tale che per ogni $g \in GR$, per ogni $S \in N/g$, $\Sigma_{i \in S} Y_i(g) = v(S)$
2. Una regola di allocazione é **equa** se per ogni $g \in GR$ per ogni $[i,j] \in g$ $Y_i(g) - Y_i(g \setminus \{[i,j]\}) = Y_j(g) - Y_j(g \setminus \{[i,j]\})$

Teorema (Myerson 1977, Mathematics of Operations Research)

Dato un gioco $< N, v >$ c'è un'unica **regola di allocazione equa** cioè che soddifa gli assiomi 1 e 2 e questa regola è $Y(g) = \Phi(v/g)$ per ogni $g \in GR$

Esempio

$N = \{1, 2, 3\}$

- $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$
- $v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 6$
- $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 12$

- $Y(\{[1, 2]\}) = (6, 6, 0)$, $Y(\{[1, 3]\}) = (3, 0, 3)$, $Y(\{[2, 3]\}) = (0, 3, 3)$,
- $Y(\{[1, 2], [1, 3]\}) = (7, 4, 1)$, $Y(\{[1, 2], [2, 3]\}) = (4, 7, 1)$, $Y(\{[1, 3], [2, 3]\}) = (3, 3, 6)$
- $Y(\{[1, 2], [1, 3], [2, 3]\}) = (5, 5, 2)$

Indice di Banzhaf

LŠindice di Banzhaf è un altro indice di potere basato sui contributi marginali come quello di Shapley. Questa volta però, tutte le coalizioni alle quali appartiene il giocatore i sono considerate equiprobabili. Quindi, essendo il numero di coalizioni possibili a cui i appartiene pari a 2^{n-1} (cioè tutte quelle coalizioni ottenute dalle coalizioni prive di i, che sono 2^{n-1} appunto, con l'aggiunta di i)
L'indice di Banzhaf corrisponde quindi a:
$\beta_i = \Sigma_{i \in S} \frac{1}{2^{n-1}} (v(S \cup \{i\} - v(S))$

Bibliografia

- Luce, R. Duncan e Howard Raiffa: Games and Decisions, Wiley, New York, 1957.
- Dutta, Prajit K.: Strategies and Games: Theory and Practice, MIT Press, 1999.
- Myerson, Roger B.: Game Theory: Analysis of Conflict, Harvard University Press, Cambridge (MA), 1991.
- Osborne, Martin e Ariel Rubinstein: A course in Game Theory, MIT Press, Cambridge (MA), 1994
- Owen, Guillermo: Game Theory, III edition, Academic Press, New York, 1995
- Patrone Fioravante :Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla teoria dei giochi Editore Plus (2006) (collana Manuali)