From orders on sets to orders on power sets using Semivalues

Giuditta Caffarra

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Dipartimento di Matematica "F.Brioschi"
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

22 Aprile 2013

Relatore:
Roberto Lucchetti

Motivazione

Nell'ambito dei processi decisionali molti problemi possono coinvolgere la comparazione di sottoinsiemi di un insieme N di oggetti sul quale è noto un sistema di preferenze.

Domanda

Come derivare un sistema di preferenze su $\mathcal{P}(N)$ **compatibile** *con quello sugli elementi di N?*

Due approcci:

- approccio assiomatico
  (Bossert (1995), Puppe (1996), Barberà et al. (2004), etc...);
- teoria dei Giochi Cooperativi e Semivalori
  (Moretti, Tsoukiàs (2012), Lucchetti, Moretti, Patrone (2013)).

Ipotesi di base

Le preferenze di un individuo su un insieme X sono rappresentate dalla *relazione binaria* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ che genera la coppia $(\sim, \succ)$:

- relazione d'indifferenza:

$$\forall x, y \in X \ (x \sim y \Leftrightarrow (x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq x));$$

- relazione di preferenza stretta:

$$\forall x, y \in X \ (x \succ y \Leftrightarrow (x \succ y \veebar y \succcurlyeq x)).$$

$\succcurlyeq$ è riflessiva, transitiva e completa $\Longrightarrow$ *preordine totale*,
$\succ$ è riflessiva, transitiva, antisimmetrica e completa $\Longrightarrow$ *ordine totale*.

Definizione

Dato un preordine totale $\succcurlyeq$ *su* N*, diciamo che il preordine totale* $\sqsupseteq$ *su* $\mathcal{P}(N)$ *è un'***estensione** *di* $\succcurlyeq$ *se*

$$\forall \ x, y \in N \ (x \succcurlyeq y \Leftrightarrow \{x\} \sqsupseteq \{y\}).$$

Approccio Assiomatico

Scelte in un contesto di Completa Incertezza

Gli insiemi sono formati da oggetti *mutualmente esclusivi*, solo uno verrà estratto secondo una distribuzione di probabilità sconosciuta all'agente.

Assiomi (Kannai and Peleg)

Simple Dominance: *per ogni* $x, y \in N$

$$x \succ y \Rightarrow \{x\} \sqsupset \{x, y\} \sqsupset \{y\}.$$

Independence: *per ogni* $A, B \in 2^N \setminus \emptyset$ *e per ogni* $x \in N \setminus (A \cup B)$

$$A \sqsupset B \Rightarrow A \cup \{x\} \sqsupseteq B \cup \{x\}.$$

Teorema

Se $\sqsupseteq$ *è un preordine totale su* $2^N \setminus \emptyset$ *che soddisfa dominanza semplice ed indipendenza, per ogni* $A \in 2^N \setminus \emptyset$, $A \simeq \{max(A), min(A)\}$.

Sia $N = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $x_1 \succ x_2 \succ x_3$,
Minmax $\sqsupseteq_{mnx}$: per ogni $A, B \in 2^N \setminus \emptyset$,

$A \sqsupseteq_{mnx} B$ se

$$\{\min(A) \succ \min(B) \text{ or } (\min(A) \sim \min(B) \text{ and } \max(A) \succcurlyeq \max(B))\}$$

$$\{x_1\} \sqsupset_{mnx} \{x_1, x_2\} \sqsupset_{mnx} \{x_2\} \sqsupset_{mnx} \{x_1, x_2, x_3\} \simeq_{mnx} \{x_1, x_3\} \sqsupset_{mnx} \{x_2, x_3\} \sqsupset_{mnx} \{x_3\}$$

Maxmin $\sqsupseteq_{mxn}$: per ogni $A, B \in 2^N \setminus \emptyset$,

$A \sqsupseteq_{mxn} B$ se

$$\{\max(A) \succ \max(B) \text{ or } (\max(A) \sim \max(B) \text{ and } \min(A) \succcurlyeq \min(B))\}$$

$$\{x_1\} \sqsupset_{mnx} \{x_1, x_2\} \sqsupset_{mnx} \{x_1, x_2, x_3\} \simeq_{mnx} \{x_1, x_3\} \sqsupset_{mnx} \{x_2\} \sqsupset_{mnx} \{x_2, x_3\} \sqsupset_{mnx} \{x_3\}$$

Libertà di Scelta

Gli insiemi sono formati da oggetti *mutualmente esclusivi* e la scelta finale viene effettuata dall'agente stesso.

Assiomi (Kreps)

Extension Robustness: *per ogni* $A, B \in 2^N \setminus \emptyset$ $(A \sqsupseteq B \Rightarrow A \simeq A \cup B)$.

Indirect-Utility $\sqsupseteq_U$: per ogni $A, B \in 2^N \setminus \emptyset$,

$$A \sqsupseteq_U B \quad \text{se} \ \max(A) \succcurlyeq \max(B).$$

$\{x_1, x_2, x_3\} \simeq_U \{x_1, x_2\} \simeq_U \{x_1, x_3\} \simeq_U \{x_1\} \sqsupset_U \{x_2, x_3\} \simeq_U \{x_2\} \sqsupseteq_U \{x_3\}$

Però $\{x_1, x_3\}$ offre più opportunità di scelta di $\{x_1\}$!

Assiomi (Pattanaik and Xu)

Indifference between No-Choice: $\forall x, y \in N \ \{x\} \simeq \{y\}$.

Simple Expansion Monotonicity: $\forall x, y \in N \ \{x, y\} \sqsupset \{x\}$.

Strong Independence: *per ogni* $A, B \in 2^N \setminus \emptyset$ *e per ogni* $x \in N \setminus (A \cup B)$

$$A \sqsupseteq B \Leftrightarrow A \cup \{x\} \sqsupseteq B \cup \{x\}.$$

Cardinality-based $\sqsupseteq_C$: per ogni $A, B \in 2^N \setminus \emptyset$,

$$A \sqsupseteq_C B \text{ se } |A| \geq |B|.$$

$$\{x_1, x_2, x_3\} \sqsupset_C \{x_1, x_2\} \simeq_C \{x_1, x_3\} \simeq_C \{x_2, x_3\} \sqsupset_C \{x_2\} \simeq_C \{x_1\} \simeq_C \{x_3\}$$

$$\downarrow$$

Indirect-utility first:

$$\{x_1, x_2, x_3\} \sqsupset_U^L \{x_1, x_2\} \simeq_U^L \{x_1, x_3\} \sqsupset_U^L \{x_1\} \sqsupset_U^L \{x_2, x_3\} \sqsupset_U^L \{x_2\} \sqsupset_U^L \{x_3\}$$

Cardinality-first:

$$\{x_1, x_2, x_3\} \sqsupset_C^L \{x_1, x_2\} \simeq_C^L \{x_1, x_3\} \sqsupset_C^L \{x_2, x_3\} \sqsupset_C^L \{x_1\} \sqsupset_C^L \{x_2\} \sqsupset_C^L \{x_3\}$$

Scelta di un Insieme di Elementi

La decisione finale dell'agente comporta la scelta di un *insieme di oggetti*.

Problema di ammissione al college

$\longrightarrow$ ordinamento su $\mathcal{N}_q = \{A \in 2^N \setminus \emptyset \mid |A| = q\}$.

Assiomi (Bossert)

Responsiveness(RESP): *per ogni* $A \in \mathcal{N}_q$, *per ogni* $x \in A$, *per ogni* $y \in N \setminus A$, $\quad A \sqsupseteq_q (A \setminus \{x\}) \cup \{y\} \Leftrightarrow x \succcurlyeq y$.

Fixed-Cardinality Neutrality: *per ogni* $A, B \in \mathcal{N}_q$, *per ogni mappa* $\varphi : A \cup B \to X$ *e per ogni* $x \in A, y \in B$,

$$(x \succcurlyeq y \Leftrightarrow \varphi(x) \succcurlyeq \varphi(y)) \Rightarrow (A \sqsupseteq_q B \Leftrightarrow \varphi(A) \sqsupseteq_q \varphi(B)).$$

$\downarrow$

lexicographic rank-ordered rule

$$n = 3 : \quad \{x_1, x_2\} \sqsupset_2 \{x_1, x_3\} \sqsupset_2 \{x_2, x_3\}$$

Limiti dell'Approccio Assiomatico

- L'approccio assiomatico modella diversi scenari definendo un sistema di assiomi plausibili che caratterizzano un certo preordine completo;
- RESP non ammette effetti di incompatibilità e complementarietà tra gli oggetti che invece vorremmo considerare;
- tutti i preordini totali introdotti soddisfano RESP.

Giochi Cooperativi

Definizione

Dato N, insieme di $n = |N|$ giocatori, un **gioco cooperativo** *TU è definito dalla coppia (N, v) dove $v : 2^N \to \mathbb{R}$ tale che $v(\emptyset) = 0$.*

$\mathcal{G}_N \approx \mathbb{R}^{2^n-1}$ è l'insieme di tutti i giochi cooperativi a n giocatori.

Definizione

Un **semivalore** *è una mappa $\pi : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^N$,*

$$\pi_i(v) = \sum_{S \in 2^{N \setminus \{i\}}} p_s m_i(S),$$

$m_i(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$, $\sum_{s=0}^{n-1} p_s \binom{n-1}{s} = 1$, $p_s \geq 0$, $0 \leq s \leq n-1$.

$\longrightarrow \vec{\pi}(v)$ fornisce la **relazione di separabilità** $\succcurlyeq_\pi$ su N:

$$i \succcurlyeq_\pi j \Leftrightarrow \pi_i(v) \geq \pi_j(v)$$

Semivalori e Multilinear Extension Function

Definizione (Owen)

Sia $v \in \mathcal{G}_N$, $f_v : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ è la **multilinear extension function** *(MLE) di v:*

$$f_v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in N \setminus S} (1 - x_j) v(S).$$

- Shapley σ: $p_s = \frac{1}{n\binom{n-1}{s}}$, $\quad \sigma_i(v) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \ldots, x) dx$;
- Banzhaf β: $p_s = \frac{1}{2^{n-1}}$, $\quad \beta_i(v) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(1/2, \ldots, 1/2)$;
- Binomiali φ_α, $0 \leq \alpha \leq 1$: $p_{\alpha,s} = \alpha^s (1-\alpha)^{n-s-1}$,
$$(\varphi_\alpha)_i(v) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha, \ldots, \alpha).$$

$$\{\varphi_{\alpha_i}\}_{1 \leq i \leq n} \Longrightarrow \pi = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_{\alpha_j} \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1.$$

Semivalori ordinalmente equivalenti

Un gioco $v \in \mathcal{G}_N$ è detto:

- **weakly complete** se la relazione *weak desirability* ($\succcurlyeq_d$) è *totale*
  $i \succcurlyeq_d j \Leftrightarrow c_{i,s}(v) \geq c_{j,s}(v),\ s = 0, 1, \ldots, n-1,$
  $c_{i,s}(v) = \sum_{i \notin S, |S|=s} (v(S \cup \{i\}) - v(S));$
- **semicoherent** se la relazione *circumstantial* ($\succcurlyeq_C$) è *totale*
  $i \sim_C j \Leftrightarrow \frac{\partial f_v}{\partial x_i}(p, \ldots, p) = \frac{\partial f_v}{\partial x_j}(p, \ldots, p),\ p \in (0, 1),$
  $i \succ_C j \Leftrightarrow \frac{\partial f_v}{\partial x_i}(p, \ldots, p) > \frac{\partial f_v}{\partial x_j}(p, \ldots, p),\ p \in (0, 1).$

Teorema

Sia $v \in \mathcal{G}_N$:

- *v è* **weakly complete** *$\leftrightarrow$ tutte le relazioni di separabilità su N date dai* **semivalori regolari** *coincidono;*
- *v è* **semicoherent** *$\leftrightarrow$ tutte le relazioni di separabilità su N date dai* **semivalori regolari binomiali** *coincidono.*

Estensioni allineate ai Semivalori

Preferenze e funzione d'utilità

Definizione

Dato $\succcurlyeq$ *su* X, $u : X \to \mathbb{R}$ *è una* **funzione di utilità** *associata a* $\succcurlyeq$ *se*

$$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succcurlyeq y.$$

- Trasformazioni isotone di funzioni di utilità danno origine ad altre funzioni di utilità;
- dato $\sqsupseteq$ su 2^N, una sua funzione di utilità è $v \in \mathcal{G}_N$.

Definizione

Sia $\mathcal{G}_N(\sqsupseteq) = \{u \in \mathcal{G}_N : \; u(S) \geq u(T) \Leftrightarrow S \sqsupseteq T\}$.

Preordini totali $\pi^{\vec{p}}$-*allineati*

Definizione

*Sia $\pi^{\vec{p}}$ un semivalore e $\succcurlyeq$ un preordine totale su N. Un preordine totale $\sqsupseteq$ su 2^N è detto $\pi^{\vec{p}}$-***allineato*** *se per ogni $i, j \in N$:*

- $i \succcurlyeq j \Leftrightarrow \{i\} \sqsupseteq \{j\}$;
- $i \succcurlyeq j \Leftrightarrow \forall v \in \mathcal{G}_N(\sqsupseteq)\ \pi_i^{\vec{p}}(v) \geq \pi_j^{\vec{p}}(v)$.

$$\Downarrow$$

OBIETTIVO: caratterizzare le estensioni su 2^N che permetto interazioni tra gli oggetti senza cambiare la classifica su N.

$N = \{1, 2, 3\}$

$\pi_i^{\vec{p}}(v) - \pi_j^{\vec{p}}(v) = \sum_{s=0}^{n-1} p_s[c_{i,s}(v) - c_{j,s}(v)] = \sum_{s=0}^{n-2} x_{s+1} \left[\sum_{S \in \sum_{ij}^{s}} d_{i,j}^S(v)\right]$,

con $d_{i,j}^S(v) = v(S \cup \{i\}) - v(S \cup \{j\})$ e $x_{s+1} = p_s + p_{s+1}$,

$n = 3 \Rightarrow \pi_i^{\vec{p}}(v) - \pi_j^{\vec{p}}(v) = x_1(v(\{i\}) - v(\{j\})) + x_2(v(\{i,k\}) - v(\{j,k\}))$.

Teorema

1. $\sqsupseteq$ *è p-allineato* **per ogni semivalore** *se e solo se per ogni coppia di oggetti* i, j $\{i\} \sqsupset \{j\}$ *e* $\{i,k\} \sqsupset \{j,k\}$ *oppure* $\{i\} \simeq \{j\}$ *e* $\{i,k\} \simeq \{j,k\}$*;*
2. $\sqsupseteq$ *è p-allineato con i* **semivalori tali che $\mathbf{p}_0 \geq \mathbf{p}_2$** *se e solo se almeno per una coppia di oggetti* i, j $\{i\} \sqsupseteq \{j,k\} \sqsupset \{i,k\} \sqsupseteq \{j\}$, *e per le restanti coppie vale il punto (1);*
3. $\sqsupseteq$ *è p-allineato con i* **semivalori tali che $\mathbf{p}_2 \neq \mathbf{1}$** *se e solo se almeno per una coppia di oggetti* i, j $\{i\} \sqsupset \{j\}$ *e* $\{i,k\} \simeq \{j,k\}$, *e per le restanti coppie vale punto (1);*
4. *in tutti gli altri casi* $\sqsupseteq$ *è p-allineato* **solo se $\mathbf{p}_0 = \mathbf{1}$**.

Allineamento per certi semivalori

- $i \succcurlyeq j \Leftrightarrow \forall v \in \mathcal{G}_N(\sqsupseteq)\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial f_v}{\partial x_i}(\bar{\alpha_k}) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial f_v}{\partial x_j}(\bar{\alpha_k})$, se ogni $v \in \mathcal{G}_N(\sqsupseteq)$ è un gioco semicoherent, $\sqsupseteq$ è allineato rispetto ai semivalori che possono essere scritti come combinazione convessa di $\{\varphi_{\alpha_k}\}_{1 \leq k \leq n}$;
- $\sqsupseteq$ è allineato a $(1, 0, \ldots, 0)$ o ad un sottoinsieme chiuso e convesso del simplesso almeno bidimensionale.

Allineamento per un semivalore fissato

Se $x_{s+1} = p_s + p_{s+1}$ sono quantità razionali, $\sqsupseteq$ è $p-$allineato se e solo se soddisfa la proprietà $p-$WPR.

Proprietà

p-WPR: $\forall i, j \in N \ (\{i\} \sqsupseteq \{j\} \Leftrightarrow \theta^p(\Sigma_{ij}, i) \sqsupseteq \theta^p(\Sigma_{ij}, j))$

$S \in \Sigma_{ij}$:

$$S_1 \cup \{i\} \sqsupseteq S_2 \cup \{i\} \sqsupseteq \cdots \sqsupseteq S_l \cup \{i\} \sqsupseteq \ldots,$$

$|S_k| = s_k$

$$\theta^p(\Sigma_{ij}, i) = (\underbrace{S_1 \cup \{i\}, \ldots, S_1 \cup \{i\}}_{x_{s_1} \, volte}, \underbrace{S_2 \cup \{i\}, \ldots, S_2 \cup \{i\}}_{x_{s_2} \, volte}, \ldots).$$

$N = \{1, 2, 3\}$, $3 \succ 2 \succ 1$,
$\{1, 2, 3\} \sqsupset \{3\} \sqsupset \{2\} \sqsupset \{1, 3\} \sqsupset \{2, 3\} \sqsupset \{1\} \sqsupset \{1, 2\} \sqsupset \emptyset$.

Allineamento per tutti semivalori: condizioni sufficienti

Proposizione

Se $\sqsupseteq$ soddisfa RESP, $\sqsupseteq$ è p-allineato per ogni semivalore.

Proprietà

PR: $\forall i, j \in N \ (\{i\} \sqsupseteq \{j\} \Leftrightarrow \theta(\Sigma_{ij}^s, i) \sqsupseteq \theta(\Sigma_{ij}^s, j)) \ s = 0, \ldots, n-2.$

Proposizione

Se $\sqsupseteq$ soddisfa PR, $\sqsupseteq$ è p-allineato per ogni semivalore.

$N = \{1, 2, 3, 4\}$, $1 \sim 2 \succ 3 \sim 4$,

$$\{1,2,3,4\} \sqsupset \{1,2,3\} \simeq \{1,4,2\} \sqsupset \{1,4,3\} \simeq \{2,3,4\}$$
$$\sqsupset \{1,2\} \sqsupset \{2,3\} \simeq \{1,4\} \sqsupset \{1\} \simeq \{2\}$$
$$\sqsupset \{1,3\} \simeq \{2,4\} \sqsupset \{3\} \simeq \{4\} \sqsupset \{4,3\} \sqsupset \emptyset.$$

Ordine totale RESP e non PR

Proposizione

Sia $n = 4$, $i \succ j \succ l \succ k$. Se $\sqsupset$ è un ordine totale RESP $\leftrightarrow$ PR.

$N = \{1,2,3,4,5\}$, $1 \succ 2 \succ 3 \succ 4 \succ 5$,

$$\{1,2\} \sqsupset \{4,3\} \sqsupset {\color{blue}\{1,5\}} \sqsupset {\color{green}\{2,3\}} \sqsupset {\color{blue}\{1,4\}} \sqsupset {\color{blue}\{2,5\}} \sqsupset {\color{green}\{1,3\}} \sqsupset {\color{blue}\{2,4\}} \sqsupset \{3,5\} \sqsupset \{4,5\}.$$

$$\{1\} \sqsupset \{2\} \sqsupset \{3\} \sqsupset \{4\} \sqsupset \{5\} \sqsupset \{1,2\} \sqsupset \{4,3\} \sqsupset \{1,5\} \sqsupset \{2,3\} \sqsupset \{1,4\} \sqsupset \{2,5\} \sqsupset \{1,3\} \sqsupset \{2,4\} \sqsupset \{3,5\} \sqsupset \{4,5\} \sqsupset \{1,2,3\} \sqsupset \{1,2,4\} \sqsupset \{1,2,5\} \sqsupset \{1,3,4\} \sqsupset \{1,3,5\} \sqsupset \{1,4,5\} \sqsupset \{2,3,4\} \sqsupset \{2,3,5\} \sqsupset \{2,4,5\} \sqsupset \{3,4,5\} \sqsupset \{1,2,3,4\} \sqsupset \{1,2,3,5\} \sqsupset \{1,2,4,5\} \sqsupset \{1,3,4,5\} \sqsupset \{2,3,4,5\} \sqsupset \{1,2,3,4,5\} \sqsupset \emptyset \sqsupset$$

verifica PR ma non RESP.

Ordine totale allineato ad ogni semivalore né RESP né PR

$N = \{1,2,3,4\}$, $\{4\} \sqsupset \{3\} \sqsupset \{2\} \sqsupset \{1\}$

$$\{1,2,3,4\} \sqsupset \{2,3,4\} \sqsupset \{3,4\} \sqsupset \{4\} \sqsupset \{3\} \sqsupset \{2\} \sqsupset \{2,4\} \sqsupset \{1,4\} \sqsupset \{1,3\} \sqsupset \{2,3\} \sqsupset \{1,3,4\} \sqsupset \{1,2,4\} \sqsupset \{1,2,3\} \sqsupset \{1,2\} \sqsupset \{1\} \sqsupset \emptyset.$$

$$\pi_3^{\vec{p}}(v) - \pi_2^{\vec{p}}(v) =$$
$$(p^0 + p^1)(v(3) - v(2)) + (p^1 + p^2)(v(1,3) - v(1,2)) +$$
$$(p^1 + p^2)(v(3,4) - v(2,4)) + (p^2 + p^3)(v(1,3,4) - v(1,2,4)) > 0,$$

$$\pi_4^{\vec{p}}(v) - \pi_3^{\vec{p}}(v) =$$
$$(p^0 + p^1)(v(4) - v(3)) + (p^1 + p^2)(v(1,4) - v(1,3)) +$$
$$(p^1 + p^2)(v(2,4) - v(2,3)) + (p^2 + p^3)(v(1,2,4) - v(1,2,3)) > 0,$$

$$\pi_2^{\vec{p}}(v) - \pi_1^{\vec{p}}(v) =$$
$$(p^0 + p^1 + p^2 + p^3)\min\{[v(2) - v(1)], [v(2,3,4) - v(1,3,4)]\} >$$
$$(p^1 + p^2)(v(1,3) - v(2,3)) > 0.$$

Condizione Necessaria e Sufficiente

Proprietà

DPR: $\forall i, j \in N \ (\{i\} \sqsupseteq \{j\} \Leftrightarrow \theta(\mathcal{D}_{ij}^{s}, i) \sqsupseteq \theta(\mathcal{D}_{ij}^{s}, j)) \ s = 0, \dots, n-2.$

$\mathcal{D}_{ij}^{s} = \Sigma_{ij}^{s} \cup \Sigma_{ij}^{s+1}$ per $s = 0, \dots, n-3$ e $\mathcal{D}_{ij}^{n-2} = \Sigma_{ij}^{n-2}$

Teorema

$\sqsupseteq$ soddisfa DPR se e solo se $\sqsupseteq$ è p-allineato per ogni semivalore.

Corollario

Se $\sqsupseteq$ è p-allineato per ogni semivalore $\rightarrow$ ogni $v \in \mathcal{G}_N(\sqsupseteq)$ è un gioco weakly complete.

- Se ogni $v \in \mathcal{G}_N(\sqsupseteq)$ è un gioco weakly complete, $\sqsupseteq$ non è necessariamente allineato con ogni semivalore;
- v può essere weakly complete senza che il corrispondente ordine soddisfi DPR.

Inseparabilità per Semivalori e Shared Kernel

Definizione

Due giochi $v, v' \in \mathcal{G}_N$ sono detti **inseparabili per semivalori** *($v \approx v'$) se $\pi(v) = \pi(v')$ per ogni semivalore π on $\mathcal{G}_N$.*

$$v \approx v' \Leftrightarrow \forall \pi \ \pi(v - v') = 0 \longrightarrow \mathcal{C}_N = \{v \in \mathcal{G}_N \mid \forall \pi \ \pi(v) = 0\}$$

Teorema

Lo Shared Kernel $\mathcal{C}_N$ ha dimensione $2^n - n^2 + n - 2$.

Una base è data dagli **shuffle games** $v_S : 2^N \to \{-1, 0, 1\}$ con $2 \leq s \leq n-2$, con almeno due absent players o un absent player e last player $s+2$:

$$v_S = e_S + e_{S \cup \{f'(S), l'(S)\} \setminus \{f(S), l(S)\}} - e_{S \cup \{f'(S)\} \setminus \{f(S)\}} - e_{S \cup \{l'(S)\} \setminus \{l(S)\}}$$

$e_S(T) = 1$, se $S = T$ $e_S(T) = 0$ altrimenti.

Proprietà degli Shuffle Games

$$v_{\{1,4\}1,4,3,2} = e_{\{1,4\}} + e_{\{2,3\}} - e_{\{3,4\}} - e_{\{1,2\}}$$
$$\downarrow$$
$$\{1,4\} \simeq \{2,3\} \sqsupset \cdots \sqsupset \{3,4\} \simeq \{2,1\}$$

$$v_{\{2,4\}2,4,3,1} = e_{\{2,4\}} + e_{\{1,3\}} - e_{\{4,3\}} - e_{\{2,1\}}$$
$$\downarrow$$
$$\{2,4\} \simeq \{1,3\} \sqsupset \cdots \sqsupset \{3,4\} \simeq \{2,1\}$$

$$v_{\{1,3,5\},1,5,4,2} \Rightarrow \{1,3,5\} \simeq \{2,3,4\} \sqsupset \cdots \sqsupset \{3,4,5\} \simeq \{1,2,3\}$$

- preordini totali indotti non sono RESP;
- soddisfano PR e DPR sotto determinate condizioni.

Conclusioni

- Le estensioni ottenute con l'approccio assiomatico soddisfano tutte RESP;
- PR e DPR permettono effetti interattivi di diversa natura tra gli oggetti:
  - n=3 RESP$\leftrightarrow$PR$\leftrightarrow$DPR,
  - n=4 RESP$\leftrightarrow$PR se ordine totale;
- se $\sqsupseteq$ è allineato per tutti i semivalori, ogni $v \in \mathcal{G}_N(\sqsupseteq)$ è un weakly complete game;
- se ogni $v \in \mathcal{G}_N(\sqsupseteq)$ è semicoherent, $\sqsupseteq$ è allineato ai semivalori esprimibili come combinazione convessa della base formata dai semivalori binomiali regolari;
- caratterizzazione degli shuffle games e degli ordini tricotomici e dicotomici;
- input per studiare relazione tra i sottoinsiemi $\mathcal{C}_N$ e $\mathcal{G}_N(\sqsupseteq)$ dal punto di vista geometrico.