Giochi cooperativi e network

Giulia Cesari

Politecnico di Milano e Université Paris Dauphine
giulia.cesari@polimi.it

Almo Collegio Borromeo, 27 aprile 2017

Gioco dei musicisti

$$N = \{violoncellista, cantante, chitarrista\}$$

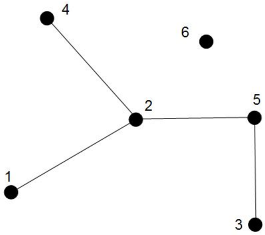
$$v(\{1\}) = 100 \quad v(\{2\}) = 150 \quad v(\{3\}) = 100$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = 400 \quad v(\{1,3\}) = 300$$
$$v(\{1,2,3\}) = 600$$

Giochi cooperativi

- Un gioco cooperativo descrive una situazione in cui tutti i giocatori possono liberamente interagire tra loro
  - tutte le coalizioni sono ammissibili
- È sempre così nella realtà?
  - interazioni sociali in un gruppo di persone
  - alleanze politiche tra partiti
  - scambi economici tra aziende
  - collaborazioni tra ricercatori
  - geni che interagiscono in una cellula

Network

- Facciamo cadere questa ipotesi
  - introduciamo una restrizione sulle possibilità di interazione tra i giocatori.
- Come possiamo rappresentare questa restrizione delle coalizioni di giocatori?
  - attraverso un *network*



◇ nodi: giocatori

◇ link: interazione diretta tra nodi

Giochi cooperativi e network

1. In che modo le restrizioni nelle comunicazioni influenzano la soluzione di un gioco?
2. Come estrarre informazioni da un network usando strumenti di teoria dei giochi?

Giochi cooperativi e network (1)

Communication situations

Una terna (N, v, Γ):

- (N, v) è un gioco di coalizione: rappresenta le possibilità "economiche" delle coalizioni
- $\Gamma = (N, E)$ è un grafo, dove N è l'insieme dei vertici: rappresenta le restrizioni di comunicazione tra i giocatori

Obiettivo: comprendere come la struttura del network influenza il gioco a priori; che ruolo gioca la struttura del grafo nelle interazioni tra i giocatori
In che modo le restrizioni nelle comunicazioni influenzano la soluzione di un gioco?

Giochi cooperativi e network (2)

Graph games

Un gioco cooperativo (N, v):

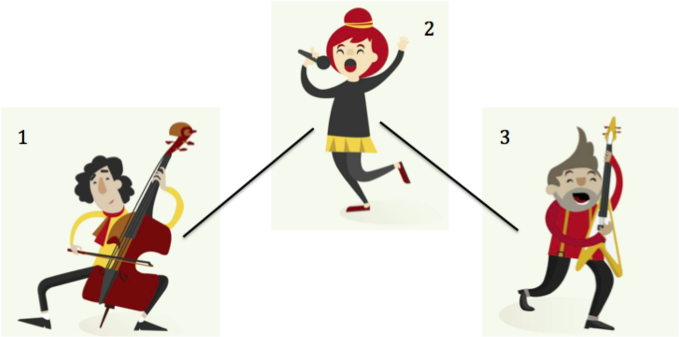
- N è l'insieme dei nodi in un network
- il valore di ogni coalizione dipende dalle proprietà del grafo sottostante

Obiettivo: estrarre informazioni dal network

Come suddividere costi/benefici? Quali sono i nodi più influenti in un grafo? Come individuare comunità all'interno di un network?

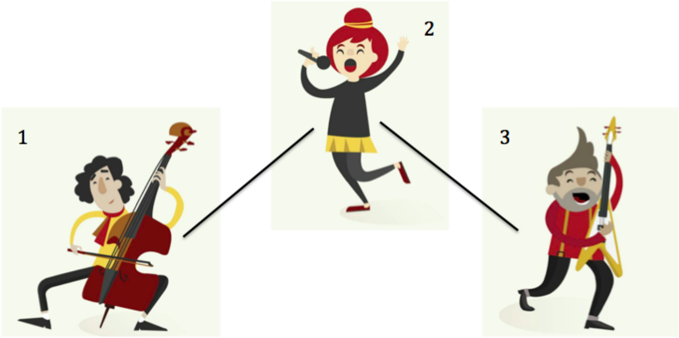
Giochi di comunicazione

Il gioco dei tre musicisti



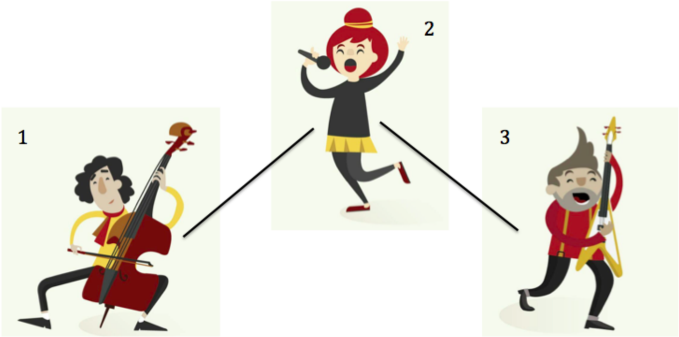
Giochi di comunicazione

Il gioco dei tre musicisti



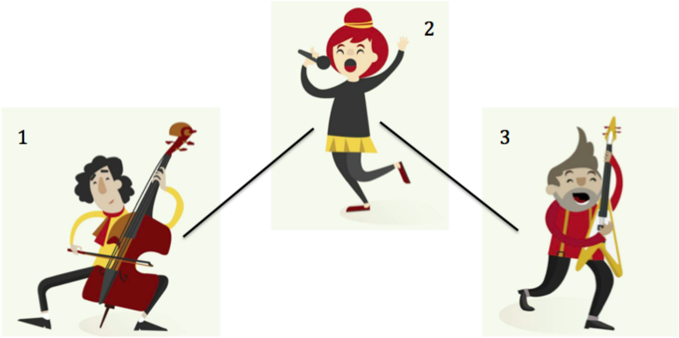
$$v(\{1,3\}) = ?$$

Possiamo pensare di assegnare valore 0 ad ogni coalizione non connessa. Come cambia la soluzione del gioco?



$$v(\{1,3\}) = 0$$

Possiamo pensare di sommare i valori delle singole componenti connesse all'interno di ogni coalizione. Come cambia la soluzione del gioco?



$$v(\{1,3\}) = v(\{1\}) + v(\{3\})$$

Graph-restricted game

Il *gioco ristretto al grafo* (N, v^Γ) è definito da:

$$v^\Gamma(S) = \sum_{T \in C_{\Gamma_S}} v(T) \quad \forall S \subseteq N,$$

dove C_{Γ_S} è l'insieme delle componenti connesse nel sottografo indotto da S.

Esempio

Sia $N = \{1, 2, 3, 4\}$ con

- $v(T) = 2$ se $\{1, 2\} \subseteq T, |T| \leq 3$
- $v(N) = 4$
- $v(T) = 0$ negli altri casi.

Se si considera il grafo di comunicazione $(N, E = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\})$, quale sarà il gioco ristretto al grafo associato?

Esempio

Sia $N = \{1,2,3,4\}$ con

- $v(T) = 2$ se $\{1,2\} \subseteq T, |T| \leq 3$
- $v(N) = 4$
- $v(T) = 0$ negli altri casi.

Se si considera il grafo di comunicazione $(N, E = \{\{1,2\},\{3,4\}\})$, quale sarà il gioco ristretto al grafo associato?
Il gioco ristretto al grafo associato (N, v^Γ) sarà:

- $v^\Gamma(T) = 2$ se $\{1,2\} \subseteq T$
- $v^\Gamma(T) = 0$ negli altri casi.

Assiomi

Proprietà 1: Efficienza per componenti

Per ogni $T \in C_\Gamma$, $\sum_{i \in T} \mu_i(N, v, \Gamma) = v(T)$.

Proprietà 2: Equità

Per ogni $\{i, j\} \in E$:

$$\mu_i(N, v, \Gamma) - \mu_i(N, v, \Gamma \backslash \{i, j\}) = \mu_j(N, v, \Gamma) - \mu_j(N, v, \Gamma \backslash \{i, j\})$$

N.B. L'Assioma 2 è anche detto *balanced contributions property*.

Teorema (Myerson 1977)

Data una situazione di comunicazione (N, v, Γ), esiste un'unica soluzione che soddifa gli assiomi 1 e 2. Tale soluzione coincide con il valore Shapley del gioco ristretto al grafo: $\mu(N, v, \Gamma) = \Phi(v^\Gamma)$.

Il valore Myerson

Il valore Myerson μ è il valore Shapley del gioco ristretto al grafo:

$$\mu(N, v, \Gamma) = \Phi(v^\Gamma)$$

Link game

I giocatori sono i link, i lati del grafo.
Il *link game* è definito da (E, v^L):

$$v^L(A) = \sum_{T \in C_{\Gamma_A}} v(T), \quad \forall A \subseteq E$$

dove C_{Γ_A} è l'insieme delle componenti connesse in Γ_A.

Esempio

Sia $N = \{1, 2, 3, 4\}$ con

- $v(T) = 2$ se $\{1, 2\} \subseteq T, |T| \leq 3$
- $v(N) = 4$
- $v(T) = 0$ negli altri casi.

Se si considera il grafo di comunicazione $(N, E = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\})$, quale sarà il gioco sui lati associato?

Esempio

Sia $N = \{1,2,3,4\}$ con

- $v(T) = 2$ se $\{1,2\} \subseteq T, |T| \leq 3$
- $v(N) = 4$
- $v(T) = 0$ negli altri casi.

Se si considera il grafo di comunicazione $(N, E = \{\{1,2\},\{3,4\}\})$, quale sarà il gioco sui lati associato?
Il gioco sui lati associato (E, v^L) sarà:

- $v^L(A) = 2$ se $\{1,2\} \subseteq A$
- $v^L(A) = 0$ negli altri casi.

Il position value

Position value (Meessen 1988)

Il position value $\pi(N, v, \Gamma)$ è definito da:

$$\pi_i(N, v, \Gamma) = \frac{1}{2} \sum_{a \in A_i} \Phi_a(v^L) \quad \forall i \in N,$$

dove A_i è l'insieme dei link che hanno il nodo i come estremo.

Il position value: caratterizzazione

Assioma 1: Efficienza per componenti

$$\sum_{i \in T} \pi_i(N, v, \Gamma) = v(T) \quad \forall T \in C_\Gamma$$

Assioma 2: Balanced total threats

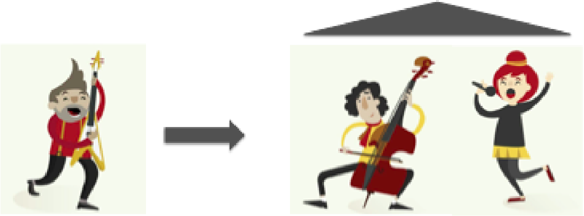
$$\sum_{a \in A_j} \left[\pi_i(N, v, \Gamma) - \pi_i(N, v, \Gamma \setminus \{a\})\right] = \sum_{a \in A_i} \left[\pi_j(N, v, \Gamma) - \pi_j(N, v, \Gamma \setminus \{a\})\right] \; \forall i, j \in N$$

Teorema (Slikker 2003)

Data una situazione di comunicazione (N, v, Γ), l'unica soluzione che soddifa gli assiomi 1 e 2 è il position value $\pi_i(N, v, \Gamma)$.

Il position value: interpretazione

Valore Shapley: i giocatori entrano in una stanza seguendo un certo ordine. Quando il giocatore $i-$esimo entra nella stanza, gli viene assegnato il suo contributo marginale alla coalzione di giocatori già presenti nella stanza. Tutte le permutazioni sono equiprobabili.



Quando il chitarrista sale sul palcoscenico, gli viene assegnato un valore pari a $v(N) - v(\{1,2\})$.

Position value: una coalizione di giocatori si forma tramite la successiva formazione di link tra i giocatori. Quando una relazione tra due giocatori si instaura, essi si dividono il surplus derivante dalla loro cooperazione. Tutte le permutazioni di link sono equiprobabili.

Quando il chitarrista e la cantante instaurano una collaborazione, essi si spartiscono il surplus pari a $v(N) - v(\{1,2\}) - v(\{3\})$.

Esempio

Gioco di maggioranza pesata: $(\{1,2,3\}, v)$ con quota $q = 2/3$.
I pesi dei giocatori sono: $w_1 = w_3 = 40\%$, $w_2 = 20\%$.

$v(1,3) = v(1,2,3) = 1$ e $v(S) = 0$ per tutte le altre coalizioni.

Il valore Shapley è:

Esempio

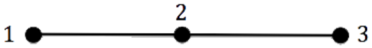
Gioco di maggioranza pesata: $(\{1, 2, 3\}, v)$ con quota $q = 2/3$.
I pesi dei giocatori sono: $w_1 = w_3 = 40\%$, $w_2 = 20\%$.

$v(1, 3) = v(1, 2, 3) = 1$ e $v(S) = 0$ per tutte le altre coalizioni.

Il valore Shapley è:

$$\phi(v) = (1/2, 0, 1/2)$$

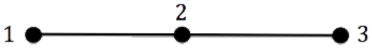
Esempio (il valore Myerson)



Il gioco ristretto al grafo è definito da: $v^{\Gamma}(1, 2, 3) = 1$ e $v^{\Gamma}(S) = 0$ per tutte le altre coalizioni.

Il valore di Myerson è

Esempio (il valore Myerson)

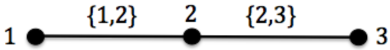


Il gioco ristretto al grafo è definito da: $v^{\Gamma}(1,2,3) = 1$ e $v^{\Gamma}(S) = 0$ per tutte le altre coalizioni.

Il valore di Myerson è

$$\mu(N, v, \Gamma) = \phi(v^{\Gamma}) = (1/3, 1/3, 1/3).$$

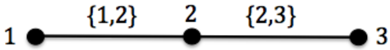
Esempio (il position value)



Il link game è definito da: $v^L(\{1,2\}) = v^L(\{2,3\}) = 0$ e $v^L(\{1,2\},\{2,3\}) = 1$.

Il position value è

Esempio (il position value)



Il link game è definito da: $v^L(\{1,2\}) = v^L(\{2,3\}) = 0$ e $v^L(\{1,2\},\{2,3\}) = 1$.

Il position value è

$$\pi(v) = (1/4, 1/2, 1/4)$$

Esercizio 1

Come cambia il compenso dei musicisti in base alle diverse soluzioni che abbiamo visto?

- Myerson value
- Position value

Esercizio 2

1. Sia $N = \{1,2,3,4\}$ con
   - $v(T) = 2$ se $\{1,2\} \subseteq T, |T| \leq 3$
   - $v(N) = 4$
   - $v(T) = 0$ negli altri casi.

   Calcolare il valore Myerson e il position value del gioco quando si considera il grafo di comunicazione $\Gamma = (N, E = \{\{1,2\},\{3,4\}\})$.
2. Sia $N = \{1,2,3,4\}$ con
   - $v(T) = |T|$ se $\{3,4\} \cap T \neq \emptyset$
   - $v(T) = 0$ negli altri casi.

   Calcolare il valore Myerson e il position value del gioco quando si considera il grafo di comunicazione
   $\Gamma = (N, E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\})$.

Graph games

- Operation research games: airport games, peer games, manteinance cost games, minimum cost spanning tree games
- Argumentation games
- Games on social networks
- Games on biological networks
- etc.

Airport games (Littlechild e Owen 1973; Littlechild e Thompson 1977)

- N è un insieme di aerei.
- N è suddiviso in m gruppi, $N_1, N_2, \ldots, N_m$, che identificano gruppi di aerei che necessitano di piste di atterraggio della stessa lunghezza
- un costo c_i è associato ad ogni gruppo N_i, $i = 1, \ldots, m$, tale che $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$
- il gioco (airport game) è definito da: $c(S) = \max\{c_i : N_i \cap S \neq \emptyset\}$

Airport games (Littlechild e Owen 1973; Littlechild e Thompson 1977)

- prima grande applicazione numerica della teoria dei giochi cooperativi (applicata all'aeroporto di Birmingham nel 1968-1969)
- il valore Shapley ha un'espressione semplice e può essere facilmente calcolato

Per $j \in N_i$, $i = 1, \ldots, m$:

$$\phi_j(c) = \sum_{k=1}^{i} (c_k - c_{k-1})/r_k$$

con $r_k = \sum_{i=k}^{m} n_i$.

Peer games (Branzei et al. 2002)

- N insieme di giocatori (agenti) che sono i nodi di un albero
- T albero diretto che descrive la gerarchia tra i giocatori, con il nodo 1 come radice (leader del gruppo)
- ogni agente i ha un potenziale individuale a_i, che rappresenta il guadagno che il giocatore i può generare se tutti i giocatori ai livelli superiori della gerarchia cooperano con lui
- $S(i)$ l'insieme di tutti gli agenti nel cammino diretto che congiunge 1 a i (i superiori di i)
- il gioco (peer game) è definito da $v(S) = \sum_{i \in N : S(i) \subseteq S} a_i$

Peer games (Branzei et al. 2002)

- i peer game sono giochi convessi: hanno buone proprietà dal punto di vista delle soluzioni (il nucleo è non vuoto, il valore Shapley appartiene al nucleo)
- hanno interessanti applicazioni (esempio: aste)

Peer games e sealed bid second price auctions

Un interessante esempio di peer games sono le aste in busta chiusa al secondo prezzo:

- Un venditore desidera vendere un oggetto ad un prezzo non minore di $r > 0$ (reservation price)
- ogni giocatore i ha la propria valutazione w_i dell'oggetto e può fare un offerta b_i (bid) in busta chiusa
- l'oggetto viene assegnato al giocatore con l'offerta più alta, al secondo prezzo più alto

Supponiamo che $w_1 > w_2 > \ldots > w_n \geq r$. In questa situazione, una strategia dominante per ogni giocatore i (senza colludere con altri giocatori) è quella di offrire il proprio valore $b_i = w_i$.
Di conseguenza, 1 ottiene l'oggetto al prezzo w_2, e i payoff dei giocatori sono $v(1) = w_1 - w_2$ e $v(i) = 0$ se $i \neq 1$.

Ora, consideriamo la possibilità che i giocatori colludano, cioè che formino delle coalizioni e concordino sull'offerta di ciascuno.

Per una coalizione S, una strategia dominante è la seguente: il giocatore $i(S) \in N$ con la valutazione più alta offre $w_{i(S)}$, e gli altri giocatori in S offrono r.

- Se tutti cooperano, il valore della coalzione N è $v(N) = w_1 - r$.
- In generale, per ogni coalizione $S \subseteq N$, abbiamo che:
  - se $1 \notin S$, $v(S) = 0$ (resta dominante per i giocatori in $N \setminus S$ offrire la loro vera valutazione, e quindi $1 \in N \setminus S$ ottiene l'oggetto)
  - se $1 \in S$, $v(S) = w_1 - w_{i(N \setminus S)}$ dove $i(N \setminus S)$ è il giocatore con la valutazione più alta in $N \setminus S$ (il giocatore 1 ottiene l'oggetto al prezzo $w_{i(N \setminus S)}$)

Il gioco (N, v) corrispondente a questa situazioni di asta è un peer game (N, T, a):

- i partecipanti all'asta sono i nodi dell'albero N
- T è il line graph con radice 1 e archi $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}$
- per ogni $i \in N$, $a_i = w_i - w_{i+1}$, con $w_{n+1} = r$.

Maintenance cost game (Borm et al. 2001)

Un *mantainance problem* è una coppia (T,t), dove T=$(N \cup \{0\}, E)$ è un albero, 0 è la radice (provider), con un solo lato adiacente e $t : E \to \mathbb{R}^+$ è una funzione di costo non negativa sui lati dell'albero (costo di manutenzione della connessione dei nodi al provider)

- ogni $i \in N$ è connesso alla radice da un unico cammino P_i
- denotiamo con e_i il lato in P_i incidente ad i
- una relazione di precedenza $\preceq$ è definita da: $j \preceq i$ se e solo se j giace sul cammino P_i
- un *tronco* $R \subseteq N \cup \{0\}$ è un insieme di vertici chiuso rispetto alla relazione $\preceq$, cioè se $i \in R$ e $j \preceq i$, allora $j \in R$.
- il costo di un tronco R è definito da:

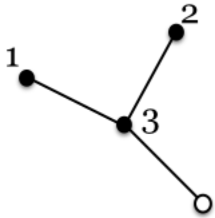
$$C(R) = \sum_{i \in R \setminus \{0\}} t(e_i)$$

Mantainance cost games (Borm et al. 2001)

- Il gioco (*maintenance cost game*) (N,c) è definito da:

$$c(S) = \min\{C(R) : S \subseteq R \text{ e } R \text{ è un tronco}\}$$

Esempio



$P_1 = (1,3,0)$; $P_2 = (2,3,0)$; $P_3 = (3,0)$

$\{1,3\}$ è un tronco ; $\{1\}$ non è un tronco

$$c(\{1\}) = c(\{1,3\}) = C(\{1,3\}) = t(e_1) + t(e_3);$$
$$c(\{2\}) = c(\{2,3\}) = C(\{1,3\}) = t(e_2) + t(e_3);$$
$$c(\{3\}) = C(\{3\}) = t(e_3);$$
$$c(\{1,2\}) = c(\{1,2,3\}) = C(\{1,2,3\}) = t(e_1) + t(e_2) + t(e_3).$$

Un unico modello: i GAG

Generalized additive situation (GAS)

Una terna $\langle N, v, \mathcal{M}\rangle$, dove:

- N è l'insieme dei giocatori;
- $v : N \to \mathbb{R}$;
- $\mathcal{M} : 2^N \to 2^N$, è la *mappa di coalizione*, che assegna una coalzione (eventualmente vuota) $\mathcal{M}(S)$ ad ogni coalizione $S \subseteq N$ di giocatori

Generalized additive game (GAG)

Data la GAS $\langle N, v, \mathcal{M}\rangle$, il *Generalized Additive Game* (GAG) associato è il TU-game $(N, v^{\mathcal{M}})$ tale che $v(\emptyset) = 0$ e $S \neq \emptyset$:

$$v^{\mathcal{M}}(S) = \sum_{i \in \mathcal{M}(S)} v(i)$$

Esempi di GAG

Giochi semplici

Un gioco semplice w può essere descritto come il GAG associato a $\langle N, v, \mathcal{M} \rangle$ con $v(i) = 1$ per ogni i e

$$\mathcal{M}(S) = \begin{cases} \{i\} \subseteq S & \text{if} \quad S \in W \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove W è l'insieme delle coalizioni vincenti in w.

Gioco dei guanti

Il gioco dei guanti w è definito come $w(S) = \min\{|S \cap L|, |S \cap R|\}$, dove $\{L, R\}$ è una partizione di N assegnata. Può essere descritto come il GAG associato a $\langle N, v, \mathcal{M} \rangle$ con $v(i) = 1$ per ogni i e

$$\mathcal{M}(S) = \begin{cases} S \cap L & \text{if} \quad |S \cap L| \leq |S \cap R| \\ S \cap R & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Una interessante sottoclasse: basic GAGs

Sia $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_i\}_{i \in N}$, dove $\mathcal{C}_i = \{F_i^1, \ldots, F_i^m, E_i\}$ è una collezione di sottoinsiemi di N tali che $F_i^j \neq \emptyset$ e $F_i^j \cap E_i = \emptyset$ per ogni $i \in N$ e per ogni $j = 1, \cdots, m$.

Basic GAG

Denotiamo con $\langle N, v, \mathcal{C} \rangle$il *basic* GAS associato alla mappa di coalizione $\mathcal{M}$ definita da:

$$\mathcal{M}(S) = \{i \in N : S \cap F_i^1 \neq \emptyset, \ldots, S \cap F_i^m \neq \emptyset, S \cap E_i = \emptyset\}$$

e con $\langle N, v^{\mathcal{C}} \rangle$ il *basic* GAG associato.

- $F_i^1, \ldots, F_i^m$: insiemi di *amici* del giocatore i;
- E_i: insieme dei *nemici* del giocatore i.

Esempi di basic GAG

- airport games
- argumentation games
- alcune classi di operation research games:
  - maintenance problems
  - peer games
  - mountain situations

Esempio: peer games

Possiamo rappresentare il peer game (N, v) come il GAG associato alla basic GAS su N dove:

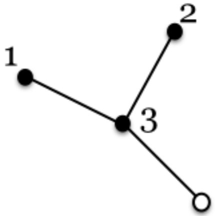
- $v(i) = a_i$
- $\mathcal{C}_i = \{F_i^1, \ldots, F_i^n, E_i\}$ tale che
  - $F_i^j = \begin{cases} \{j\} & \text{se } j \in S(i) \\ \{i\} & \text{altrimenti} \end{cases}$
  - $E_i = \emptyset$ per ogni $i \in N$.

Esempio: mantainance cost games

Possiamo rappresentare il mantainance cost game (N, c) come il GAG associato alla basic GAS su N dove:

- $v(i) = t(e_i)$
- $\mathcal{C}_i = \{F_i, E_i\}$ tale che $F_i = F(i)$ e $E_i = \emptyset$ per ogni $i \in N$

dove $F(i) = \{j \in N | i \preceq j\}$ è l'insieme dei successori (followers) del giocatore i.



$$F_1 = \{1\}$$
$$F_2 = \{2\}$$
$$F_3 = \{1, 2, 3\}$$

N.B. $i \in F(i)$ *per ogni* $i \in N$.

Decomposizione di un basic GAG

Il basic GAG $v^{\mathcal{C}}$ associato ad una basic GAS può essere decomposto nel seguente modo:

$$v^{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^{n} v^{\mathcal{C}_i},$$

dove ogni $i = 1, \ldots, n$:

$$v^{\mathcal{C}_i}(S) = \begin{cases} v(i) & \text{se } S \cap E_i = \emptyset, S \cap F_i^k \neq \emptyset \ \forall k = 1, \ldots, m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa decomposizione ci permette di sfruttare la linearità del valore Shapley e altri indici di potere per ricavare una soluzione di $v^{\mathcal{C}}$ a partire dalla soluzione dei $v^{\mathcal{C}_i}$.

Esercizio

Descrivere i seguenti giochi come basic GAGs:

- airport games
- peer games
- sealed bid second price auctions

Bibliografia

- Amer, R., Giménez, J. M. (2004). A connectivity game for graphs. Mathematical Methods of Operations Research, 60(3): 453-470.
- Bonzon, E., Maudet N., Moretti S. Coalitional games for abstract argumentation. In Proceedings of the 5th International Conference on Computational Models of Argument (COMMA'14), 201
- Borm, P., Owen, G., Tijs, S. (1992). On the position value for communication situations. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 5(3): 305-320.
- Borm, P., Hamers, H., Hendrickx, R. (2001). Operations research games: A survey. Top, 9(2), 139-199.

Bibliografia

- Brânzei, R., Fragnelli, V., Tijs, S. (2002) Tree-connected peer group situations and peer group games. Mathematical Methods of Operations Research 55.1 : 93-106.
- Cesari, G., Lucchetti, R., Moretti, S. (2016). Generalized Additive Games. International Journal of Game Theory, 1-21.
- Littlechild, S.C., Owen, G. (1973). A simple expression for the Shapley value in a special case. Management Science 20, 370-372.
- Littlechild, S.C., Thompson, G.F. (1977). Aircraft landing fees: a game theory approach. Bell Journal of Economics 8, 186-204.
- Meessen, R. (1988). Communication games. Master's Thesis (in Dutch), Department of Mathematics, University of Nijmegen, The Netherlands.

Bibliografia

- Moretti, S., Norde, H., Do, K.H.P., Tijs, S. (2002). Connection problems in mountains and monotonic allocation schemes. Top, 10(1), 83-99.
- Moretti, S. (2008) Cost Allocation Problems Arising from Connection Situations in an Interactive Cooperative Setting. CentER, Tilburg University.
- Myerson, R.B. (1977) Graphs and cooperation in games. Mathematics of operations research. 2(3): 225-229.
- Slikker, M. (2005a). A characterization of the position value*. International Journal of Game Theory, 33(4): 505-514.
- Van den Nouweland, A., Slikker, M. (2012). An axiomatic characterization of the position value for network situations. Mathematical Social Sciences, 64(3): 266-271.