Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 6 aprile 2017

email: anna.torre@unipv.it

sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2017.html

ELIMINAZIONE DI STRATEGIE DOMINATE

Conoscenza e conoscenza comune sono elementi centrali nella teoria economica e nella teoria dei giochi.

I \ II	su	giù
sinistra	(2, 2)	(5, 1)
centro	(3, 4)	(4, 2)
destra	(2, 1)	(3, 4)

Per il giocatore I la strategia “destra” è strettamente dominata da “centro”, dunque “destra” può essere eliminata.

ELIMINAZIONE DI STRATEGIE DOMINATE

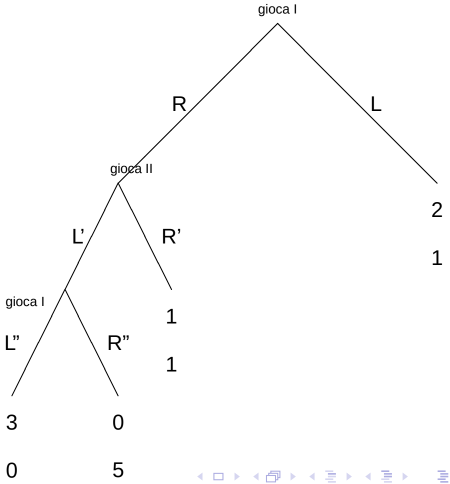
Proseguiamo nella eliminazione:

- il giocatore II a questo punto può eliminare “giù” perché strettamente dominata da “su”,
- II è convinto che I abbia eliminato “destra”, perché I giocasse “destra” II non avrebbe più alcun motivo di eliminare “giù”.

Il metodo della eliminazione iterata di strategie strettamente dominate dà per scontato che i giocatori siano intelligenti e razionali, che ciascuno sappia che gli altri lo sono, che ciascuno sappia che gli altri sanno che loro sono intelligenti e razionali, ecc..

INDUZIONE A RITROSO

Un altro esempio di assunzione implicita della conoscenza comune della intelligenza e razionalità di tutti i gicatori è dato dalla cosidetta "induzione a ritroso".



CONOSCENZA E CONOSCENZA COMUNE

- Supponiamo che tre ragazze, tutte con la faccia sporca, siano sedute in cerchio e ciascuna di esse veda la faccia delle altre due.
- Supponiamo inoltre che le tre ragazze siano intelligenti e razionali e abbiano assoluta fiducia nella intelligenza e razionalità delle altre, e abbiano assoluta fiducia nel fatto che ciascuna delle altre ha assoluta fiducia nel fatto che ciascuna ha assoluta fiducia nella intelligenza e razionalità delle altre e così via.
- Supponiamo inoltre che l'intelligenza provochi l'effetto che ciascuna di esse arrossisce se e soltanto se ha la certezza di avere la faccia sporca.

CONOSCENZA E CONOSCENZA COMUNE

Osserviamo i due seguenti fatti:

1. Ciascuna delle ragazze vede le altre, quindi sa che almeno una di esse ha la faccia sporca;
2. Nessuna ragazza ha la possibilità di sapere se la sua faccia è sporca, perché nella stanza non esistono specchi.

Se questa è la situazione, nessuna ragazza ha motivo di arrossire.

IL BANDITORE

Supponiamo ora che entri una persona e faccia il seguente annuncio: “Almeno una delle ragazze qui presenti ha la faccia sporca”.
Ovviamente viene annunciato un fatto già noto a tutti, ma la situazione cambia.
Cosa è cambiato?
È cambiato il fatto che l’annuncio mette a conoscenza le ragazze del fatto che tutte e tre sono a conoscenza del fatto che almeno una di loro ha la faccia sporca.

LA CONOSCENZA COMUNE

Quali conseguenze ha questo ?

- Indichiamo con A, B, C le tre ragazze.
- Mettiamoci dal punto di vista di A
- A pensa: se io ho la faccia pulita, B e C osservano ciascuna una sola faccia sporca. Quindi per esempio B, se C non arrossisce, sa di avere la faccia sporca. C non arrossisce, quindi presto B avrà la certezza che le facce sporche sono almeno due e, sempre nel caso che la mia faccia sia pulita, arrossirà.
- Ma B non arrossisce, io ho la certezza che le facce sporche sono tre e poichè sono “intelligente” mi tocca di arrossire.

Simmetricamente anche ciascuna delle altre ragazze fa lo stesso ragionamento e quindi ha la certezza di avere la faccia sporca, dunque arrossisce.

LA CONOSCENZA COMUNE

- L'ipotesi di conoscenza comune ha permesso un passaggio di informazione "silenzioso" dovuto semplicemente alla osservazione, da parte di ciascuna ragazza, dei comportamenti delle altre e alla certezza che tali comportamenti dovevano essere intelligenti.
- Ciascuna ragazza "fidandosi dei comportamenti dell'altra" alla fine assume informazione.

Le Tre Signorine

	a	b	c	d	e	f	g	h
A	S	S	S	S	P	P	P	P
B	S	S	P	P	S	S	P	P
C	S	P	S	P	S	P	S	P

$$\Omega = \{a, b.c, d, e, f, g, h\}.$$

è l'insieme degli stati del momdo

Noi siamo nello stato $\omega = a$.

Le partizioni di A, B, C sullo stato del mondo sono :

$$H_A = \{\{a, e\}, \{b, f\}, \{c, g\}, \{d, h\}\},$$

$$H_B = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{e, g\}, \{f, h\}\},$$

$$H_C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{g, h\}\}.$$

Conoscenza comune e informazione asimmetrica

Il più noto risultato ottenuto con la definizione formale di conoscenza comune è il teorema di Aumann, che assicura che, sotto opportune ipotesi, giocatori razionali non possono essere d'accordo di non essere d'accordo sulla probabilità che ciascuno di essi assegna a un dato evento, se queste probabilità sono conoscenza comune.

Essere daccordo di non essere daccordo

- L’idea intuitiva del teorema è: se un giocatore sa che gli altri giocatori hanno aspettative diverse dalle sue, egli rivede le sue aspettative per tener conto di quelle degli altri.
- perché il risultato sia valido è necessario che ciascuno pensi che il modo di ragionare degli altri è corretto e che la differenza nelle aspettative riflette solo qualche informazione obiettiva.
- È inoltre necessario che tutti i giocatori abbiano quella che si dice una “common prior”, e cioè che abbiano una distribuzione di probabilità a priori uguale tra di loro, e che questa distribuzione di probabilità a priori sia conoscenza comune
- Le esperienze diverse portano ad avere distribuzioni di probabilità diverse da quelle iniziali
- Nel momento però in cui queste nuove probabilità diventano conoscenza comune, ciascuno le rivede per l’assoluta fiducia che ha nella intelligenza e razionalità degli altri.

essere daccordo di non essere daccordo

Aumann, Robert J. [1976]: Agreeing to Disagree, Annals of Statistics, 4, 1236-1239. Sia $\omega \in \Omega$. Supponiamo che sia conoscenza comune in ω che la probabilità a posteriori di un evento E è q_i per il giocatore i e q_j per il giocatore j. Allora $q_i = q_j$.
Osserviamo che il teorema di Aumann assicura soltanto che le probabilità a posteriori sono uguali, ma non dice affatto che a posteriori i giocatori sappiano per quali motivi la probabilità dell'altro è quella annunciata

$$\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\},$$

e supponiamo che su Ω ci sia una distribuzione di probabilità a priori uniforme. Il giocatore 1 vede solo la prima componente dell'elemento di Ω, mentre il giocatore 2 vede solo la seconda componente. Dunque

$$H_1 = \{\{(0,0),(0,1)\},\{(1,0),(1,1)\}\}$$

e

$$H_2 = \{\{(0,0),(1,0)\},\{(0,1),(1,1)\}\}.$$

In $\omega = (0,0)$, calcoliamo le probabilità a posteriori dell'insieme $E = \{(0,0),(1,1)\}$. Si ha $q_1(E) = q_2(E) = 1/2$. Ma quando entrambi i giocatori annunciano queste probabilità nessuno dei due dà all'altro alcuna nuova informazione. Infatti, per esempio, vediamo la situazione del giocatore 1. In ω egli vede $\{(0,0),(0,1)\}$ e il fatto che il giocatore 2 annuncia 1/2 per 1 è perfettamente compatibile con il fatto che 2 veda invece $\{(0,1),(1,1)\}$. Nessuna informazione sul procedimento logico che ha portato 2 a dichiarare 1/2 è passata.

Dadi

IL primo giocatore osserva l’esito del primo dado (rosso) e il secondo osserva l’esito del secondo dado (blu). Quale probabilità assegnano al fatto che lo stato vero del mondo sia E?(insieme dei pallini neri).

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4				●	●	●
5		●	●			
6	●					

Dadi

Le prior di entrambi sono $\frac{1}{6}$. Dopo aver osservato ciascuno l'esito del suo dado chi osserva il dado blu aggiorna a $\frac{1}{6}$ mentre il giocatore che osserva il dado rosso aggiorna a $\frac{1}{3}$. Quando le informazioni vengono scambiate il giocatore che osserva il dado blu è sicuro che lo stato vero del mondo è $(5, 3)$ e quindi assegna ad E probabilità 1. Una volta rese note queste nuove probabilità, il giocatore che osserva il dado rosso è certo che lo stato vero del mondo è uno fra $(5, 2)$ e $(5, 3)$ e quindi assegna ad E probabilità 1.

Dadi

	1	2	3	4	5	6
1					●	●
2					●	●
3					●	●
4					●	●
5						
6						

Dadi

Le prior di entrambi sono $\frac{8}{36}$. Dopo aver osservato ciascuno l'esito del suo dado chi osserva il dado blu aggiorna a $\frac{2}{3}$ mentre il giocatore che osserva il dado rosso aggiorna a $\frac{1}{3}$. Quando le informazioni vengono scambiate il giocatore che osserva il dado blu è sicuro che lo stato vero del mondo non è $(5, 5)$ nè $(5, 6)$ quindi assegna ad E probabilità 1. Analogo discorso per chi osserva il dado blu.

	1	2	3	4	5	6
1					●	●
2					●	●
3					●	●
4					●	●
5	●	●				
6	●	●				

Dadi

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

	1	2	3	4	5	6
1						●
2					●	
3				●		
4			●			
5		●				
6	●					

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5		●				
6	●					