Esercizio 1

Sia (N, v) un gioco cooperativo, dove $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e tale che $v(\{i\}) = 0$ per ogni $i \in N$, $v(\{2, 3\}) = v(\{2, 4\}) = v(\{2, 3, 4\}) = 0$ e $v(S) = 1$ per ogni altra coalizione $S \subseteq N$. Sia (N, E) un network, con $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$.

- Calcolare il valore Myerson.
- Calcolare il position value.

Soluzione

- Il gioco ristretto al grafo v^Γ coincide con il gioco di unanimitá $u_{\{1,2\}}$. Il valore Myerson é quindi dato da $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$.
- Il link game v^L coincide con il gioco di unanimitá $u_{\{a\}}$, con $a = \{1, 2\}$. Il position value coincide quindi con il valore Myerson.

Esercizio 2

Si consideri la matrice di espressione in tabella:

	sample 1	sample 2	sample 3	sample 4
gene 1	0	1	1	1
gene 2	1	0	0	1
gene 3	1	0	1	1
gene 4	0	0	0	0

- Calcolare il valore Shapley del microarray game associato.
- La coalizione $\{gene2, gene3\}$ é una partnership?

Soluzione

- Per definizione, il microarray game nell'esercizio puó essere scritto come combinazione di giochi di unanimità come segue:

$$v = \frac{1}{4}\left[u_A + u_B + u_C + u_D\right],$$

dove $A = \{2,3\}$, $B = \{1\}$, $C = \{1,3\}$, $D = \{1,2,3\}$. Il valore Shapley di v è quindi dato da:

$$\phi(v) = \frac{1}{4}\big[\phi(u_A) + \phi(u_B) + \phi(u_C) + \phi(u_D)\big].$$

Quindi: $\phi_1(v) = \frac{11}{24}$, $\phi_2(v) = \frac{5}{24}$, $\phi_3(v) = \frac{8}{24}$, $\phi_4(v) = 0$.

- La coalizione $\{gene2, gene3\}$ non é una partnership.

Esercizio 3

Sia (N,E) un network, con $N = \{1,2,3,4\}$ e $E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\}$.

- Calcolare la degree centrality, la closeness centrality e la betweenness centrality dei nodi.
- Siano N i giocatori del gioco v_E^k, dove $k_i = 1$ per ogni nodo $i \in N$. Calcolare l'indice di rilevanza $\rho(v_E^k)$.

Soluzione

La degree centrality é data da $(2,2,3,1)$, la closeness centrality da $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{5})$ e la betweenness centrality da $(0,0,2,0)$.
L'indice di rilevanza $\rho(v_E^k)$ é dato da $(\frac{11}{12}, \frac{11}{12}, \frac{17}{12}, \frac{3}{4})$.