Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 21 marzo 2017 email: anna.torre@unipv.it
sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2017.html

Teoria dei giochi evolutivi

- La moneta è sostituita dalla “Darwinian fitness”(Maynard Smith 1982);
- La teoria dei giochi evolutivi non si basa su giocatori individuali ma su strategie implementabili da due differenti categorie di individui (es femmine e maschi, dominanti e subordinati, esperti e inesperti, ecc...);
- Ogni tipo di giocatore ha un insieme di strategie che può adottare in risposta a quella degli altri.
- Se le migliori strategie sono ereditabili, i giocatori che le adottano le trasmettono alle future generazioni e quindi le generazioni successive adottano quelle strategie in numero sempre maggiore.

Teoria dei giochi evolutivi

- La soluzione“migliore” nel contesto dei giochi evolutivi è quella che ci si aspetta evolverà tramite la selezione naturale;
- In altre parole una strategia evolutivamente stabile è una strategia che non può essere rimpiazzata da una strategia rara (mutante) che può apparire casualmente;
- Un equilibrio evolutivamente stabile può essere composto da strategie pure ma anche da strategie miste.

Giochi evolutivi

- Un gabbiano ha due possibili strategie per procurarsi il pesce: pescarlo (P) e rubarlo a un altro gabbiano (R);
- È abbastanza probabile aver osservato entrambe le strategie;
- Se tutti i gabbiani applicassero la strategia R non ci sarebbe nessun pesce da rubare;
- Se un certo numero applicano la strategia P, la strategia R diventa conveniente perchè meno faticosa.

come è fatta la bimatrice?

I \ II	P	R
P	(h(P,P), h(P,P))	(h(P,R), h(R,P))
R	(h(R,P), h(P,R))	(h(R,R), h(R,R))

dove $h(A,B)$ dipende da fattori come la pescosità del corso d'acqua, la numerosità dei gabbiani, la presenza di altri predatori, ecc....

Giochi evolutivi

- La matrice di un gioco evolutivo ha dunque una particolarità: è simmetrica, cioè $f(A,B) = g(B,A)$ per ogni coppia di strategie $A,\ B$;
- Notare che in generale però $f(A,B)$ è diverso da $f(B,A)$.

Giochi simmetrici

- Un gioco non cooperativo a due giocatori in forma strategica (X, X, f, g) si dice simmetrico se esiste una funzione h tale che $f(x, y) = h(x, y)$ e $g(x, y) = h(y, x)$;
- In un gioco simmetrico gli spazi di strategie dei due giocatori sono gli stessi;
- Un gioco simmetrico non ha necessariamenti equilibri simmetrici ma se possiede l'equilibrio (a, b) possiede anche l' equilibrio (b, a);
- Il dilemma del prigioniero è un gioco simmetrico.

Giochi evolutivi:formalizzazione

- Una strategia evolutivamente stabile è una strategia che non viene rimpiazzata da una strategia (mutante) che compare nella popolazione.
- Definizione (intuitiva) di strategia evolutivamente stabile:
  Sia (X, X, f, g) un gioco simmetrico. Una strategia b^* si dice evolutivamente stabile se, quando in una popolazione di animali che adottano tutti la strategia b^* avviene una qualunque mutazione e questa mutazione fa sì che una piccola percentuale della popolazione adotti una strategia b diversa da b^*, allora l'utilità attesa di un mutante è minore di quella di un non mutante.

Considerazioni sugli equilibri evolutivi

- Sia ε la probabilità (frequenza relativa) del mutante. L'utilità attesa del non mutante b^* è
  $u(b^*) = (1-\varepsilon)f(b^*, b^*) + \varepsilon f(b^*, b)$
  mentre l'utilità attesa del mutante b è
  $u(b) = (1-\varepsilon)f(b, b^*) + \varepsilon f(b, b)$;
- La strategia b^* è evolutivamente stabile se e solo se $u(b) < u(b^*)$ per ogni strategia b e per ogni numero ε sufficientemente piccolo.

Considerazioni sugli equilibri evolutivi

Dunque deve esistere un numero δ tale che per ogni ε nell'intervallo $[0, \delta]$ si abbia:

$(1)\ \ u(b) = (1-\varepsilon)f(b, b^*) + \varepsilon f(b, b) < u(b^*) = (1-\varepsilon)f(b^*, b^*) + \varepsilon f(b,^*, b)$

da cui, passando al limite per ε tendente a 0, si ha

a) $f(b, b^*) \leq f(b^*, b^*)$ per ogni b

che è la definizione di equilibrio di Nash.

Considerazioni sugli equilibri evolutivi

Questo non basta perchè se per qualche b vale

$f(b,b^*) = f(b^*,b^*)$

la condizione (1) diventa

$\varepsilon f(b,b) < \varepsilon f(b^*,b)$

e quindi

b) $f(b,b) < f(b^*,b)$

Considerazioni sugli equilibri evolutivi

Le condizioni a) e b) implicano ovviamente la (1).

- DEFINIZIONE formale di strategia evolutivamente stabile.
  Sia (X,X,f,g) un gioco simmetrico. Una strategia b^* si dice evolutivamente stabile se (b^*,b^*) è un equilibrio di Nash e se inoltre per ogni strategia $b \neq b^*$ tale che $f(b,b^*) = f(b^*,b^*)$ allora $f(b,b) < f(b^*,b)$;
- Sia (X,X,f,g) un gioco simmetrico. Un equilibrio di Nash formato da una coppia di strategie (b^*,b^*) tale che b^* è evolutivamente stabile, si dice equilibrio evolutivo;
- Un equilibrio evolutivo si ottiene per una coppia di strategie uguali.

Il gioco falchi-colombe

- Supponiamo che in una popolazione di animali della stessa specie si verifichino delle contese tra due animali per la conquista della preda e poniamo uguale a 1 l'utilità che un animale ottiene conquistando una preda;
- Supponiamo poi che l'animale abbia a disposizione solo due strategie: una aggressiva Falco e una non aggressiva Colomba.
- Se entrambi gli animali si comportano da C si dividono la preda e ottengono $\frac{1}{2}$ ciascuno;
- Se uno si comporta da C e l'altro da F, F prende 1 e C 0;
- Se entrambi si comportano da F prendono ciascuno $\frac{1}{2} - c$ essendo c il costo del combattimento.

In tabella:

Il gioco falchi-colombe

I \ II	F	C
F	(1/2-c, 1/2-c)	(1, 0)
C	(0, 1)	(1/2, 1/2)

Strategie pure

Cerchiamo gli equilibri di Nash in strategie pure:

- se $\frac{1}{2} - c > 0$ cioè $c < \frac{1}{2}$, la strategia F è evolutivamente stabile e (F, F) è un equilibrio di Nash evolutivo ma inefficiente.
- se $\frac{1}{2} - c = 0$ cioè $c = \frac{1}{2}$, la strategia F è evolutivamente stabile e (F, F) è un equilibrio di Nash evolutivo, ma ci sono altri due equilibri di Nash (F, C) e (C, F) che non sono evolutivi. La strategia F è l'unica evolutivamente stabile.
- se $\frac{1}{2} - c < 0$ cioè $c > \frac{1}{2}$, il gioco ha due equilibri (F, C) e (C, F) che non sono evolutivi.

Strategie miste

- Per entrambi i giocatori una strategia mista è un numero p compreso tra 0 e 1 che rappresenta la probabilità che egli giochi la strategia F mentre $1 - p$ rappresenta la probabilità che egli giochi la strategia C.
- Sia p la strategia del primo giocatore e q la strategia del secondo.
- Si ha: $f(p,q) = g(q,p) = h(p,q) = (\frac{1}{2} - c)pq + p(1-q) + \frac{1}{2}(1-p)(1-q) = \frac{1}{2}(p - q + 1) - cpq$

- se $c < \frac{1}{2}$. L'intersezione delle due curve di miglior risposta dà l'unico equilibrio di Nash $(1, 1)$ che corrisponde a giocare sempre la strategia F ed è l'equilibrio di Nash in strategie pure già noto e che è anche evolutivo.
- se $c = \frac{1}{2}$, $(1, 1)$ e tutti i punti del tipo $(p, 1)$ e $(1, q)$ con p e q qualsiasi sono equilibri di Nash, ma solo $(1, 1)$ è evolutivo.
- se $c > \frac{1}{2}$ si trovano tre equilibri di Nash $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c})$ I primi due equilibri non sono evolutivi perchè non sono simmetrici , mentre il terzo è evolutivo. La strategia $\frac{1}{2c}$ è l'unica strategia evolutivamente stabile. Quindi in questo caso ci possiamo aspettare, come risultato della selezione naturale, non una popolazione di tutti F o di tutte C, ma una popolazione di individui che adottano la strategia mista $p = \frac{1}{2c}$.

Equilibrio in strategie miste

- La strategia di miglior risposta a q è quella che realizza $max_p u(p,q) = max_p(-cq + \frac{1}{2})p - \frac{q}{2} + \frac{1}{2}$,
- La strategia di miglior risposta a q è quella che realizza $max_q u_2(p,q) = max_q u(q,p) = max_q(-cp + \frac{1}{2})q - \frac{p}{2} + \frac{1}{2}$.
- Queste due multifunzioni si intersecano nei punti $(0,1)$, $(1,0)$ e $(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c})$.
- $(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c})$ è evolutivo. $\frac{1}{2c}$ in questo caso è effettivamente una probabilità in quanto $c > \frac{1}{2}$ e quindi $0 < \frac{1}{2c} < 1$.
- $u(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c}) = \frac{2c-1}{4c}$
- $u(p, \frac{1}{2c}) = \frac{2c-1}{4c}$ per ogni valore di p.

Equilibrio in strategie miste

- Occorre che sia verificata la condizione
  $u(p,p) < u(\frac{1}{2c},p)$
- $u(p,p) = \frac{1-2cp^2}{2}$,
  $u(\frac{1}{2c},p) = \frac{1-4cp+2c}{4c}$
  si ottiene che $u(p,p) < u(\frac{1}{2c},p)$ se e solo se $(2cp-1)^2 > 0$ che è equivalente a $p \neq \frac{1}{2c}$
  Dunque in questo caso l'equilibrio è evolutivo.

Cambiamento delle condizioni

- Il parametro c che determina il modello non è altro che il rapporto tra il costo della lotta e il valore della preda e quindi dipende dall'ambiente e può variare se variano le condizioni ambientali;
- Se il numero delle prede diminuisce, il valore di una singola preda aumenta e quindi c diminuisce (noi abbiamo infatti per convenzione posto uguale a 1 in ogni caso il valore della preda);
- Quindi diminuendo il numero delle prede deve aumentare la probabilità che gli animali si comportino da F, ma questo avviene in tempi lunghi. Bisogna aspettare che avvenga per caso una mutazione, poi l'ambiente esercita la sua influenza sui mutanti.

Cambiamento del parametro

- Supponiamo che il numero delle prede diminuisca in modo tale che il nuovo valore della costante sia sia $c_1 < c$ con ancora $\frac{1}{2} < c_1$;
- Finchè non avvengono mutazioni gli animali continuano ad adottare la strategia $\frac{1}{2c}$ anche se questa non è più di equilibrio;
- Supponiamo che a un certo momento compaia una mutazione che fa comparire una percentuale ε di mutanti che al posto della vecchia strategia adottano la nuova strategia $\frac{1}{2c_1}$.
- La mutazione viene accettata se l'utilità attesa f_m di un mutante è maggiore dell'utilità attesa f_{nm} di un non mutante.

  $f_{nm} = (1-\varepsilon)f(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c}) + \varepsilon u(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c_1})$
  $f_m = (1-\varepsilon)u(\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c}) + \varepsilon u(\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_1})$

Cambiamento del parametro

La mutazione viene accettata se

(3) $f_{nm} < f_m$

Ma $u(p,q) = \frac{(p-q+1)}{2} - c_1 pq$

e quindi ora si ha:

$u(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c_1}) = \frac{2c_1-1}{4c}$

$u(\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c}) = \frac{2c_1c+c-2c_1}{4cc_1}$

$u(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c}) = \frac{2c^2-c_1}{4c^2}$

$u(\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_1}) = \frac{2c_1-1}{4c_1}$

La (3) diventa quindi:

$\varepsilon\frac{2c_1-1}{4c} + (1-\varepsilon)\frac{2c_1c+c-2c_1}{4cc_1} > \varepsilon\frac{2c_1-1}{4c_1} + (1-\varepsilon)\frac{2c^2-c_1}{4c^2}$

che sviluppando i conti diventa

$c^2 - 2cc_1 + c_1^2 = (c_1 - c)^2 > 0$

che è vera purchè $c \neq c_1$ e dunque l'utilità del mutante è maggiore dell'utilità del non mutante.