Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 2 marzo 2017 email: anna.torre@unipv.it
sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2017.html

MODALITÀ DI ESAME

- Sono previsti due appelli in sessione estiva: scritto per chi ha diritto a 3 crediti, scritto e orale chi ha diritto a più crediti;
- Un altro appello in giugno;
- In seguito mi dovete contattare per email

UN PO' DI STORIA

- Von Neumann, Morgenstern " Theory of Games and Economic Behavior"(Princeton, 1944);
- Ernst Zermelo (1912 congresso di Cambridge),

UN PO' DI STORIA

- Dalla fine del settecento c'era il progetto di estendere ad altri campi del sapere il metodo matematico che aveva rivoluzionato lo studio della fisica usando un modello molto simile a quello della fisica matematica (vedi "Elements of Pure Economics" di Walras 1874);
- von Neumann e Morgenstern (1944) presentano una critica radicale alla teoria walrasiana dell'equilibrio economico generale, rea, secondo gli autori, di non tenere in considerazione l'influsso che le interazioni con gli altri individui hanno sulle decisioni di ogni singolo individuo.

UN PO' DI STORIA

- Il libro di von Neumann e Morgenstern è il primo a proporre questo programma in maniera sistematica e in relazione allo studio delle scienze sociali;
- La vera rivoluzione non è usare i metodi matematici utili per lo studio della fisica applicandoli all'economia, ma costruire una "matematica nuova", che fornisca uno strumento adatto allo studio di questi argomenti: la teoria dei giochi.

DI COSA SI OCCUPA LA TDG

La TdG o “Teoria delle decisioni interattive” si occupa delle situazioni in cui nel processo decisionale:

- interviene più di un decisore,
- ogni decisore detiene solo un controllo parziale,
- i decisori hanno preferenze non necessariamente uguali sugli esiti.

ASSUNZIONI

Si assume solitamente (almeno all'inizio) che i decisori:

- conoscano la situazione di interazione (conoscenza comune),
- possano scegliere tra diversi corsi d'azione,
- siano intelligenti (molto intelligenti e senza limiti alle loro capacità di calcolo o deduzione).

APPLICAZIONI

Oggi la teoria dei giochi ha moltissimi variegati campi di applicazione. Alcuni esempi:

- La prima applicazione è ovviamente l'economia(la teoria è nata sostanzialmente per questo)
- Il problema di scegliere adeguati meccanismi d'asta;
- La Teoria dei giochi evolutivi che ha una buona capacità di comprendere comportamenti animali;
- In Microbiologia: lo studio della rilevanza di alcuni geni nella insorgenza di specifiche malattie;
- In Medicina: come organizzare un sistema di scambi di reni (cross-over) per i trapianti. Nel 2012 il premio Nobel per l'economia è stato assegnato a Lloyd Shapley e Alvin Roth e una delle motivazioni è proprio questa.

Perché è importante conoscere le preferenze dei giocatori quando si descrive un gioco?

Per stabilire quali sono i nostri obiettivi nel giocare dobbiamo sapere quantificare gli esiti del gioco.
Un giocatore potrebbe anche desiderare la sconfitta se il suo obiettivo è far felice l' avversario, o desiderare il pareggio se è un perfetto egualitario.
Se per qualcuno fare del bene è soddisfacente, questo è ciò che guida le sue azioni e deve essere implicito nella sua funzione di utilità.
Non importa "quali" sono gli obiettivi. Ciò che importa è soltanto che siano quantificabili.

PREFERENZE

il termine **“intelligenza”** si riferisce alla capacità di analisi della situazione e alla capacità illimitata di calcolo degli individui che partecipano al gioco: essi sono in grado di massimizzare la propria utilità rispetto ai vincoli imposti dal gioco.

Il termine **“razionalità”** in teoria dei giochi si riferisce alla proprietà transitiva nell’insieme delle preferenze:

se un decisore preferisce una mela a una pera e una pera a una arancia **deve** preferire la mela all’arancia.

PREFERENZE

Perché tanta importanza alla transitività delle preferenze?
Supponiamo di incontrare un decisore con preferenze non transitive.
P=pera, M=mela, A= arancia Sia poi disponibile R^+ denaro e il decisore abbia preferenze di questo tipo:
$(0, M) \sqsupset (0, P) \sqsupset (0, A) \sqsupset (0, M)$
mentre per quanto riguarda il denaro le preferenze siano standard: maggiore è il denaro meglio è.

PREFERENZE

Supponiamo anche che

$(0, M) \sqsupset (0, P) \Rightarrow (-\varepsilon, M) \sqsupset (0, P)$

$(0, P) \sqsupset (0, A) \Rightarrow (-\varepsilon, P) \sqsupset (0, A)$

$(0, A) \sqsupset (0, M) \Rightarrow (-\varepsilon, A) \sqsupset (0, M)$

per ε piccolo.

In presenza di un tale decisore se ci si possono procurare una pera, un'arancia e una mela ci si può arricchire .

PREFERENZE

Si regala la pera al decisore e poi gli si propongono scambi:
$M \leftrightarrow P$ e si guadagna ε e si resta con P, A
$A \leftrightarrow M$ e si guadagna ε e si resta con P, M
$P \leftrightarrow A$ e si guadagna ε e si resta con M, A
$M \leftrightarrow P$ e si guadagna ε e si resta con P, A
Dopo n passaggi di questo tipo abbiamo intascato $n\varepsilon$

PREFERENZE

Il problema delle preferenze sugli esiti induce una riflessione sulla cosidetta

teoria dell'utilità.

Secondo l'economia politica classica (Smith, Ricardo, Marx), l'utilità (valore) coincide con una proprietà fisica dei beni.
In una seconda fase (a partire da Bentham) l'utilità è intesa come una caratteristica intrinseca dei soggetti, ne misura in qualche modo il "benessere" o la "soddisfazione" in relazione a certi consumi: l'utilità è una funzione definita sull'insieme dei beni (o degli esiti del gioco).

PREFERENZE

Ma come quantificare l'utilità?
La cosa più ragionevole è pensare all' utilità come a una relazione definita sull' insieme E delle possibili alternative con le proprietà:

- riflessiva: $x \sqsubseteq x$ per ogni x che appartiene a E
- transitiva: $x \sqsubseteq y$ e $y \sqsubseteq z \Longrightarrow x \sqsubseteq z$ per ogni x y z che appartengono a E
- totale: per ogni x, y appartenenti ad E o $x \sqsubseteq y$ o $y \sqsubseteq x$

Questo tipo di utilità si dice utilità ORDINALE

PREFERENZE

Preferenze ordinali o cardinali?

Si parla di **“funzione di utilità”**. Ogni individuo ha una **“sua” funzione di utilità** u **sull’insieme dei beni**. che soddisfa la proprietà $x \sqsubseteq y \iff u(x) \leq u(y)$

Sotto opportune ipotesi u esiste ma non è unica: se u rappresenta un preordine $\sqsubseteq$ anche tutte le funzioni che si ottengono applicando una trasformazione strettamente crescente a u rappresentano $\sqsubseteq$.

GIOCHI

Una prima distinzione nell'ambito della teoria dei giochi è data dal contesto istituzionale nel quale ci si muove:

- Si parla di giochi cooperativi se sono ammessi accordi vincolanti;
- Si parla di giochi non cooperativi se non sono ammessi accordi vincolanti.

Questa distinzione non implica che nei giochi cooperativi siano presenti atteggiamenti più altruistici: le eventuali scelte altruistiche sono già nel modello e vengono rappresentate dalle funzioni di utilità dei singoli.

GIOCHI

La TdG “nasce" nel 1944 con l’intento di approntare nuovi strumenti matematici con i quali affrontare l’analisi dei fenomeni economici e sociali. Dopo periodi di alterna fortuna il progetto di Von Neumann e Morgenstern si sta realizzando. Naturalmente non si ha una matematizzazione completa e soddisfacente dei fenomeni sociali, ma la Teoria dei giochi è uno strumento efficace ed importante per la loro analisi. La TdG non è in grado di fornire risposte nette e ricette semplici tranne in casi molto particolari: non è semplice stabilire quali sono i “giusti" concetti di soluzione applicabili ai vari contesti interattivi.
Si deve soprattutto a von Neumann l’idea di analizzare i giochi cooperativi, mentre è Nash che ha dato impulso alla teoria non cooperativa.

GIOCHI

In realtà i giochi in senso letterale (scacchi, carte, backgammon, etc . . .) vengono usati come “palestre” per imparare a modellizzare interazioni economiche e sociali, qualcosa di analogo a quanto accade per i cosidetti “giochi d’azzardo” in relazione alla probabilità. **Osserviamo che un cosidetto “gioco” contro il caso (per esempio il lotto o la roulette) in cui c’è un solo giocatore che gioca contro la sorte non è un gioco (o meglio è un gioco degenere) nel senso della teoria dei giochi. Per esserci un gioco vero devono esserci almeno due individui razionali che interagiscono.**

COME DESCRIVERE UN GIOCO

- Una importante classificazione che occorre fare nel contesto dei giochi discende dalla risposta alla seguente domanda:
  “Vi è oppure no per i giocatori la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti?”
- in presenza di questa possibilità si parla di **giochi cooperativi**, in caso contrario si parla di **giochi non cooperativi**.
- **Parleremo di giochi non cooperativi a due giocatori.**

Giochi non cooperativi

Due modalità rappresentative:

- la **forma estesa**
- la **forma normale o strategica**.

- Un gioco è **in forma estesa** quando la descrizione è fatta mossa per mossa fino ad arrivare a presentare tutte le situazioni finali, ciascuna esito univoco di una data serie di mosse.
- La **forma normale (o strategica)** invece precisa le strategie. Le strategie in questa descrizione sono un dato del problema, mentre nella forma estesa il dato sono le mosse, ed un compito di chi analizza il gioco è proprio quello di dedurre da queste le strategie di ogni giocatore.

Giochi non cooperativi

Un'ulteriore distinzione è quella fra
giochi ad Informazione completa e giochi ad Informazione incompleta.
In un gioco a **Informazione completa** le regole del gioco e le funzioni di utilità di tutti i giocatori sono conoscenza comune dei giocatori.

L'ipotesi di informazione incompleta porta a una teoria più sofisticata ma anche più soddisfacente, proprio in quanto più aderente alla realtà. Noi però per il momento ci occuperemo di giochi **a informazione completa**.

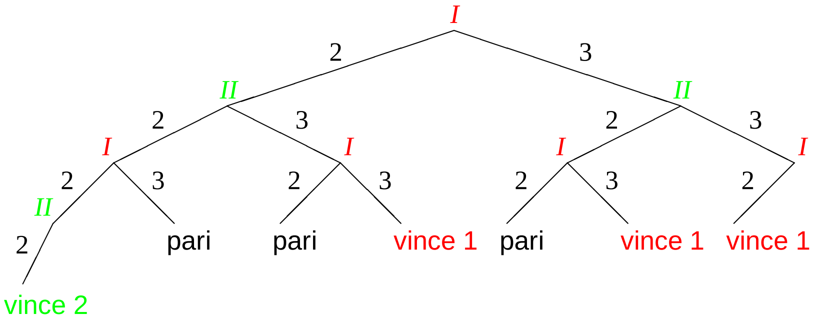
Forma estesa

La forma estesa consiste in una descrizione dettagliata di tutte le possibili partite. È stata introdotta da von Neumann e Morgenstern (1944) e formalizzata da Kuhn (1953)

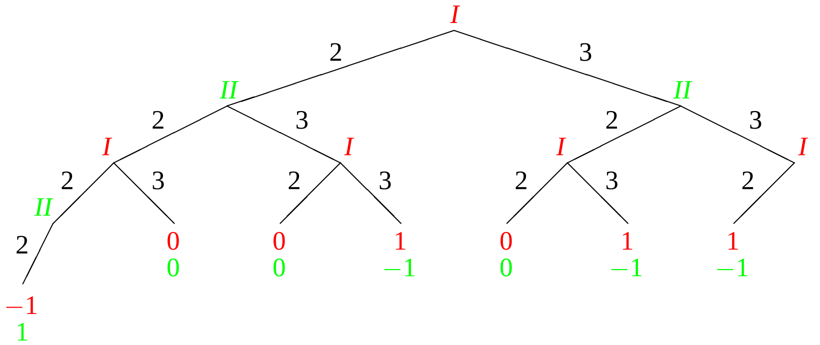
IL GIOCO DELL'OTTO

- Si gioca in due.
- Il primo giocatore può scegliere di giocare 2 o 3.
- Successivamente il secondo giocatore fa la stessa cosa.
- I numeri giocati vengono sommati.
- E così via a turno, ma è vietato fare una mossa che porti ad un totale superiore ad 8.
- Vince chi fa in modo che la somma dei numeri giocati sia 8.

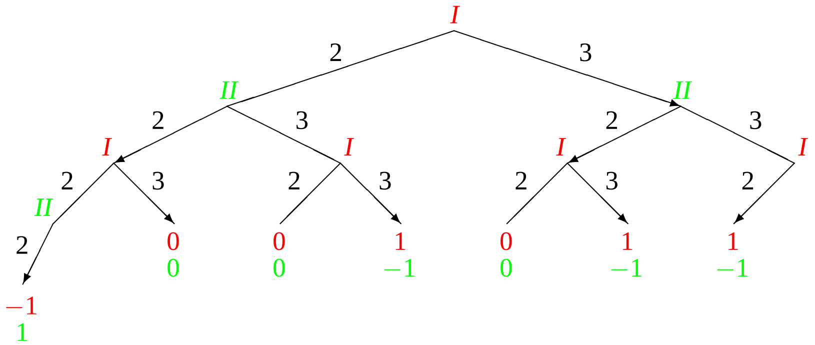
La GAME FORM DEL GIOCO DELL'OTTO (IN "FORMA ESTESA")



IL GIOCO DELL'OTTO (IN "FORMA ESTESA") con le utilità standard per i giocatori



INDUZIONE A RITROSO



GIOCO DEL “PALLONE O FIDANZATA/O”

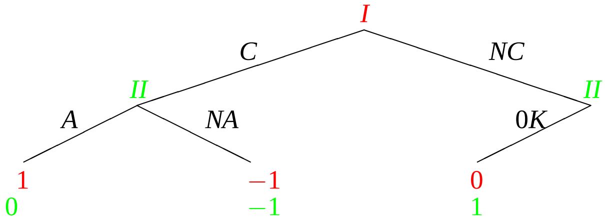
Abbiamo un appuntamento con la fidanzata/o alle ore 18.
Alle ore 16 ci telefona un amico perché manca un giocatore per la partita di calcetto. Noi abbiamo due possibilità:
a) dirgli di no perché abbiamo appuntamento con la fidanzata;
b) dirgli di síe arrivare in ritardo all’appuntamento.
La fidanzata a questo punto potrebbe o andarsene o aspettarci.
Il nostro ordine di preferenze è:

1. giocare a calcetto e incontrarci un po’ in ritardo con la fidanzata (1);
2. incontrarci con la fidanzata rinunciando al calcetto (0);
3. giocare a calcetto e perdere l’appuntamento (-1).

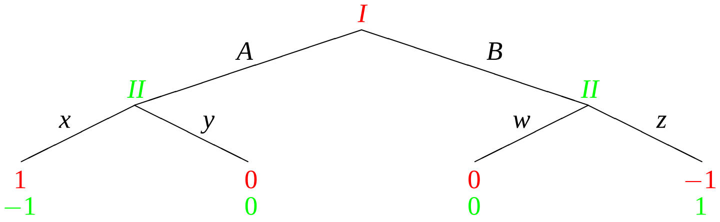
L’ordine di preferenza della fidanzata è:

1. che noi arriviamo in tempo all’appuntamento (1);
2. aspettarci perché siamo in ritardo (0);
3. andarsene perché siamo in ritardo (-1).

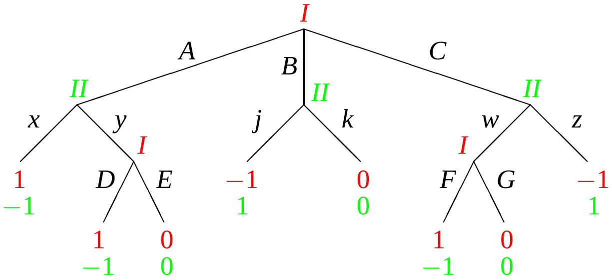
FORMA ESTESA



UN ALTRO GIOCO IN FORMA ESTESA



UN ALTRO GIOCO IN FORMA ESTESA



ESERCIZIO:FIAMMIFERI

Ci sono due mucchietti di due fiammiferi ciascuno.
Due giocatori a turno levano un certo numero (strettamente positivo) di fiammiferi tutti dallo stesso mucchio.
Chi toglie l'ultimo fiammifero perde.
Costruire l' albero.