Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 9 marzo 2017 email: anna.torre@unipv.it
sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2017.html

MODALITÀ DI ESAME

- È previsto un appello alla fine del corso: scritto per chi ha diritto a 3 crediti, scritto e orale chi ha diritto a più crediti;
- Un altro appello in giugno;
- In seguito mi dovete contattare per email

BIBLIOGRAFIA PICCOLA

- Myerson "Game Theory: Analysis of Conflict", Harvard University Press (1991).
- Patrone "Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla teoria dei giochi", PLUS (2006)
- Owen "Game Theory", Academic Press, New York (1995)
- Luce, Raiffa , "Games and Decisions", Wiley, New York (1957).

STRATEGIA DEBOLMENTE DOMINANTE

Dato un gioco a due giocatori in forma strategica

$$(X, Y, f, g),$$

se per un certo $\bar{x}$ e un certo x^*

$$f(\bar{x}, y) \geq f(x^*, y)$$

per ogni $y \in Y$ e per almeno un $\bar{y}$ si ha

$$f(\bar{x}, \bar{y}) > f(x^*, \bar{y})$$

,
diciamo che $\bar{x}$ domina debolmente x^*.
Se $\bar{x}$, domina x^* possiamo supporre che il giocatore I non giocherà x^*.

STRATEGIA FORTEMENTE DOMINANTE

Dato un gioco a due giocatori in forma strategica

$$(X, Y, f, g),$$

se per un certo $\bar{x}$ e un certo x^*

$$f(\bar{x}, y) > f(x^*, y)$$

per ogni $y \in Y$ diciamo che $\bar{x}$ domina fortemente x^*.
Se $\bar{x}$, domina x^* possiamo supporre che il giocatore I non giocherà x^*.

ELIMINAZIONE ITERATA DI STRATEGIE FORTEMENTE DOMINATE: SUCCESSI

I \ II	x	y	z
A	(2, 1)	(1, 3)	(0, 1)
B	(3, 0)	(2, 2)	(1, 3)
C	(1, 1)	(4,-1)	(-1, 0)
D	(2, 4)	(0, 0)	(-1, 3)

ELIMINAZIONE ITERATA
DI STRATEGIE FORTEMENTE DOMINATE: LIMITI

I \ II	x	y	z
A	(2, 1)	(1, 3)	(0, 1)
B	(3, 0)	(2, 2)	(1, 3)
C	(1, 1)	(4,-1)	(2, 0)
D	(2, 4)	(0, 0)	(-1, 3)

ELIMINAZIONE ITERATA DI STRATEGIE DEBOLMENTE DOMINATE: LIMITI

I \ II	x	y
A	(1, 1)	(0, 0)
B	(1, 1)	(2, 1)
C	(0, 0)	(2,1)

EQUILIBRIO DI NASH

Consideriamo il gioco:

$(X,\ Y,\ f,\ g:\ X \times Y \to \mathbf{R})$

dove X e Y sono gli spazi di strategie, e f, g sono le funzioni di utilità dei giocatori

$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ si dice equilibrio di Nash se

1. $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$;
2. $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$.

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

I \ II	S	T
S	(5, 5)	(0, 6)
T	(6, 0)	(1, 1)

Punto di vista di I:

I \ II	S	T
S	(5)	(0)
T	(6)	(1)

Punto di vista di II:

I \ II	S	T
S	(5)	(6)
T	(0)	(1)

La soluzione è: i giocatori giocano entrambi T e prendono 1 ciascuno, ma il risultato è inefficiente.

Equilibri di Nash

Un massimo ombra è un equilibrio di Nash.
Gli elementi ottenuti per eliminazione di strategie fortemente dominate sono equilibri di Nash.
In un gioco in forma estesa a informazione perfetta gli equilibri ottenuti per induzione a ritroso sono equilibri di Nash del corrisponedente gioco in forma strategica.
Ma un equilibrio di Nash può non essere ne un massimo ombra ne ottenuto per eliminazione di strategie fortemente dominate.

Equilibri di Nash

Alla base della definizione di equilibrio di Nash vi sono alcuni presupposti:

- Immaginiamo che i due giocatori si mettano d'accordo per giocare, l'uno la strategia $\bar{x}$ e l'altro la strategia $\bar{y}$.
- I due giocatori effettuano le loro scelte contemporaneamente ed indipendentemente.
- I giocatori non possono effettuare tra di loro degli accordi vincolanti.
- L'accordo deve resistere a considerazioni del tipo seguente da parte per esempio del giocatore I: "visto che se violo l'accordo non mi succede nulla, vediamo se posso far di meglio anzichè giocare la $\bar{x}$. Le possibilità sono due: o II non rispetta l'accordo, e allora inutile tenerne conto, oppure lo rispetta. In questo secondo caso, vediamo se non c'è un'altra strategia x per cui $f(x, \bar{y}) > f(\bar{x}, \bar{y})$"

Equilibri di Nash

Affinché $(\bar{x}, \bar{y})$ sia ragionevole occorre che resista a tentazioni di questo tipo, cioè appunto
$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$.
Analoghe considerazioni da parte del giocatore II portano alla condizione $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$

Equilibri di Nash

La definizione di equilibrio di Nash è strutturata in modo da tenere conto di queste considerazioni: le condizioni dicono che nessuno dei giocatori ha convenienza a deviare dalla strategia che gli è “prescritta” dall’equilibrio, a condizione che neppure l’altro giocatore “devii”’.
Di solito, quando si parla di equilibri, si usa chiamarli equilibri di Nash o di Cournot-Nash. La ragione è la seguente:
John F. Nash, ([1950]: Equilibrium Points in n-Person Games, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36, 48-49) prova un importante teorema il quale garantisce l’esistenza di un equilibrio per una classe molto ampia ed importante di giochi, estendendo al caso generale il risultato di von Neumann per i giochi a somma zero (cioè quelli per cui $f(x,y) + g(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in X \times Y$).
Cournot nel 1838 aveva “anticipato” la TdG adottando, come “soluzione” per un modello di oligopolio, proprio questa idea di equilibrio.

LA BATTAGLIA DEI SESSI

I \ II	S	T
S	(2, 1)	(0, 0)
T	(0, 0)	(1, 2)

IL PARI O DISPARI

I \ II	S	T
S	(-1, 1)	(1, -1)
T	(1, -1)	(-1, 1)

Questo gioco ha equilibri di Nash? Ha strategie dominate?

FALCHI E COLOMBE

I \ II	F_2	C_2
F_1	(-2, -2)	(2, 0)
C_1	(0, 2)	(1, 1)

È RILEVANTE SCEGLIERE PER PRIMI?

I \ II	*NP*	*P*
NP	(2, 2)	(0, 3)
P	(3, 0)	(1, 1)

I \ II	*S*	*T*
S	(2, 1)	(0, 0)
T	(0, 0)	(1, 2)

I \ II	*L*	*R*
T	(-1, 1)	(1,-1)
B	(1,-1)	(-1, 1)

AUMENTARE I PLAYOFF MIGLIORA LA SITUAZIONE?

I \ II	P	D
P	(12, 12)	(102,11)
D	(11,102)	(101, 101)

I \ II	P	D
P	(9, 9)	(99, 10)
D	(10, 99)	(100,100)