Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 4 aprile 2017

email: anna.torre@unipv.it

sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2017.html

Giochi ripetuti

- GIOCHI RIPETUTI: COLLUSIONE
- Sorgere spontaneo della cooperazione
- Siamo in un contesto istituzionale non cooperativo.
- Non si possono assumere accordi vincolanti.

Giochi ripetuti

- Se un gioco viene giocato un'unica volta non c'è alcun motivo per cooperare se non c'è un contratto scritto
- Se il gioco viene ripetuto “non cooperare” a un certo stadio del gioco potrebbe significare che negli stadi successivi l'altro giocatore potrebbe non cooperare più.

L'incentivo alla cooperazione è più forte. Si tratta di vedere

come si costruisce una norma sociale.

Orizzonte temporale

- I comportamenti saranno diversi se i giocatori hanno un orizzonte temporale breve o un orizzonte temporale lungo (infinito).
- La differenza tra orizzonte finito e infinito è più una differenza di percezione della durata del gioco da parte dei giocatori che non una situazione effettivamente reale.
- Un modello di orizzonte finito è piu ragionevole quando i giocatori percepiscono chiaramente il periodo finale, mentre quello con orizzonte infinito quando i giocatori dopo ogni periodo pensano che il gioco continuerà per un periodo ancora.
- Altrimenti, visto che la vita è finita, potremmo modellizzare solo orizzonte finito.

Orizzonte temporale finito

- se il gioco possiede un solo equilibrio di Nash, il gioco ripetuto con orizzonte temporale finito ha un unico equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi che consiste nel giocare ad ogni passo la strategia di equilibrio
- Se il gioco ha più di un equilibrio di Nash, allora il gioco ripetuto può avere degli equilibri di Nash perfetti nei sottogiochi in cui in qualche passo i giocatori non giocano una strategia di equilibrio del gioco componente.

Dilemma del prigioniero

Il primo di questi due risultati può essere illustrato analizzando il dilemma del prigioniero:

I \ II	L	R
T	(5, 5)	(1, 6)
B	(6, 1)	(2, 2)

- Questo gioco ha un unico equilibrio di Nash in cui il primo giocatore sceglie B e il secondo sceglie R. Inoltre l'equilibrio di Nash si ottiene anche per eliminazione di strategie strettamente dominate. Ripetiamo due volte il gioco.
- Il gioco ripetuto due volte ha molti equilibri di Nash ma uno solo perfetto nei sottogiochi. Ricordiamo che la scelta è sempre simultanea, quindi i giocatori scelgono due volte in stadi successivi ma ogni volta simultaneamente.
- Rispetto al gioco in una sola mossa la differenza qui è che quando scelgono la seconda volta possono osservare quello che è accaduto la prima.

Dilemma del prigioniero

- 1) nella prima ripetizione le strategie sono (T, L)
- 2) nella prima ripetizione le strategie sono (T, R)
- 3) nella prima ripetizione le strategie sono (B, L)
- 4) nella prima ripetizione le strategie sono (B, R)

La matrice delle vincite del sottogioco 1 è la seguente:

I \ II	L	R
T	(10, 10)	(6, 11)
B	(11, 6)	(7, 7)

L'equilibrio di Nash è dunque (B, R)

La matrice delle vincite del gioco 2 è

I \ II	L	R
T	(6, 11)	(2, 12)
B	(7, 7)	(3, 8)

L'equilibrio di Nash è dunque (B, R).

Lo stesso accade per i sottogiochi 3 e 4. (Scrivere i payoff)

Dilemma del prigioniero

Il problema è che nel dilemma del prigioniero il payoff di equilibrio coincide con il minmax per ciascuno dei due giocatori e ciò impedisce di punire un giocatore che non aderisca alla strategia collaborativa. Riporto l'esempio del libro di Patrone “Decisori razionali interagenti”:

I \ II	L	R	Z
T	(2, 2)	(0, 5)	(0, 0)
B	(5, 0)	(1, 1)	(0, 0)
W	(0, 0)	(0, 0)	(-1, -1)

payoff di equilibrio$= 1$

payoff di $minmax = 0$,

Un altro equilibrio

In questo caso è possibile costruire (fissando H e K opportunamente) un equilibrio di Nash che dà a entrambi i giocatori un payoff vicino a 2.

- La coppia di strategie che dà un equilibrio di Nash vicino a quello che si otterrebbe giocando sempre (T, L) è la seguente:
- I)Se il numero di ripetizioni è K, gioco T all'inizio e continuo fino allo stadio $K - H$ a meno che il giocatore II non giochi qualcosa di diverso da L, se questo avviene allora passo a giocare W dallo stadio successivo fino alla fine del gioco. Se invece, giunti allo stadio $K - H$ non c'è stata alcuna deviazione di II dalla strategia L gioco B fino alla fine del gioco.
- II) Strategia analoga

Perché questo è un equilibrio di Nash?

- Ovviamente negli ultimi H stadi a nessuno conviene deviare perché si gioca un equilibrio.
- Se I devia, allo stadio in cui devia guadagna 3 in più di quanto guadagnerebbe non deviando, ma successivamente perde almeno 1 in tutti gli stadi successivi;
- Il suo guadagno complessivo è dunque minore o uguale a $3 - H$;
- Se $H \geq 3$ il guadagno complessivo è negativo ed è quindi una perdita.

Come ottenere un risultato vicino a 2?

- Vogliamo ottenere un risultato maggiore di $2-\varepsilon$;
- Vogliamo quindi che $2(K-H)+H \geq (2-\varepsilon)\cdot K$;
- Questo dice $K \geq \frac{H}{\varepsilon}$
- Dunque se K è sufficientemente grande si può superare $2-\varepsilon$

Gli equilibri così trovati però non sono perfetti nei sottogiochi.

Dilemma del prigioniero

Si consideri la seguente modifica del dilemma del prigioniero:

I \ II	L	R	Z
T	(5, 5)	(1, 6)	(0, 0)
B	(6, 1)	(3, 3)	(0, 0)
W	(0, 0)	(0, 0)	(1, 1)

Ripetiamo due volte

- Gli equilibri di Nash sono (B, R) e (W, Z). In realtà le vincite migliori per entrambi i giocatori sono quelle relative alle strategie (T, T) dove entrambi ottengono 5.
- Supponiamo ora di ripetere il gioco due volte.
- Notiamo per prima cosa che le strategie di ciascun equilibrio giocate entrambe le volte costituiscono un equilibrio di Nash e quindi nel gioco ripetuto si ritrovano gli equilibri di Nash del gioco di partenza.
- Tali equilibri sono anche perfetti nei sottogiochi

Un'altra coppia di strategie

Consideriamo anche la seguente strategia:
Scelgo T nel periodo 1, nel periodo 2 scelgo S se nel primo periodo le azioni osservate sono (T, L), altrimenti scelgo W.
Se entrambi i giocatori adottano questa strategia si ottiene ancora un equilibrio perfetto nei sottogiochi.
Per verificarlo occorre considerare 9 sottogiochi nel periodo 2, ciascuno corrispondente di una delle 9 coppie di strategie possibili nel primo gioco.

Orizzonte temporale infinito

Nel caso di ripetizione infinita consideriamo un tasso di scontoδ interpretabile come il fatto che i guadagni in uno stadio successivo sono moltiplicati per un numero δ con $0 < \delta < 1$ rispetto a quelli dello stadio precedente: in sostanza 5 euro domani valgono 5δ euro di oggi.
Se un gioco viene ripetuto infinite volte si possono otterere risultati differenti; in particolare acquistano rilevanza i concetti di minaccia e di punizione, come e più che nel caso di orizzonte finito con più equilibri di Nash. Ad esempio se il dilemma del prigioniero è ripetuto infinite volte non si può applicare il ragionamento basato sull'induzione a ritroso, per cui la minaccia
"se non cooperi io non coopererò mai più "
acquista un peso diverso. Il risultato più importante è il cosidetto "Folk's Theorem".

Orizzonte infinito:Dilemma del prigioniero

Vediamo un esempio sempre riferito al dilemma del prigioniero.

I \ II	L	R
T	(5, 5)	(1, 6)
B	(6, 1)	(2, 2)

Supponiamo che entrambi i giocatori adottino la seguente strategia:

- **T** "Nel primo periodo scelgo T e successivamente scelgo T se e solo se in tutti i periodi precedenti ho osservato (T, L), in caso contrario da quel momento in poi scelgo B." (si chiama "trigger strategy")
- **T** "Nel primo periodo scelgo L e successivamente scelgo L se e solo se in tutti i periodi precedenti ho osservato (T, L), in caso contrario da quel momento in poi scelgo R."

Che succede?

Calcoliamo le vincite di ciascun giocatore.

Se entrambi scelgono la strategia **T** sopra scritta ottengono :

$u_I(T) = u_{II}(T) = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + 5\delta^3 + \ldots.. = 5\frac{1}{1-\delta}$

Se I adotta un'altra strategia D_i che al passo i-esimo gli fa scegliere B per la prima volta, e II adotta **T**, ottiene

$u_I(D_i) = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + \ldots.. + 5\delta^{i-1} + 6\delta^i + 2\delta^{i+1} \ldots.. =$

$5 + 5\delta + 5\delta^2 + \ldots\ldots 5\delta^{i-1} + 6\delta^i + 2\delta^{i+1} \cdot \frac{1}{1-\delta}$

Sommiamo la serie

Si ha

$u_I(D_i) \leq u_I(T) \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{4}$

infatti: $u_I(D_i) \leq u_I(T) \Leftrightarrow 6\delta^i + 2\delta^{i+1}\frac{1}{1-\delta} \leq 5\delta^i + 5\delta^{i+1}\frac{1}{1-\delta} \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{4}$

Analogo discorso si può fare per II.

Quindi, se il tasso di sconto è maggiore di $\frac{1}{4}$, la coppia di strategie (**T**,**T**) è un equilibrio di Nash e si potrebbe vedere che è anche perfetto nei sottogiochi..

Un'altra interpretazione

Analogo risultato si può ottenere se il tasso di sconto viene invece interpretato come la probabilità che un gioco di durata aleatoria prosegua da un dato stadio al successivo.