Tornei e Aste

- Il modello di Cournot è essenzialmente un modello di **competizione tra imprese venditrici per i consumatori**.
- Naturalmente la teoria dei giochi è stata utilizzata per studiare anche altre forme della competizione tra imprese.
- E anche per studiare la **competizione tra compratori**, tra **partiti politici**, **lobbisti**, **membri di un'organizzazione**, **specie** e persino le **gare sportive**.

Tornei (Tullock, 1967)

- Il modello di **torneo** più comune in letteratura è stata proposto dall'economista statunitense Gordon Tullock (1922-2014) per esaminare la **competizione per l'assegnazione di una rendita**.
- Nel caso più semplice, supponiamo che ci sia un "**premio**" da assegnare a ***due*** potenziali "**concorrenti**".
- Il **valore del premio** per il concorrente i è dato da V_i, e la probabilità per lui di riceverlo dipende dal suo **sforzo/investimento** G_i.

Tornei

- In particolare, assumiamo che la funzione di *payoff* sia data da (i, j = 1,2, $i \neq j$):
  - $\pi_i(G_i, G_j) = p_i(G_i,G_j)V_i - C_i\,(G_i)$,

- dove p_i è la **probabilità** di ricevere il premio, con
  - $p_i(G_i,G_j) = \phi_i(G_i)/[\phi_i(G_i) + \phi_j(G_j)]$

    $[p_i(G_i,G_j) = 1/2$ if $\phi_i(G_i) + \phi_j(G_j) = 0]$.

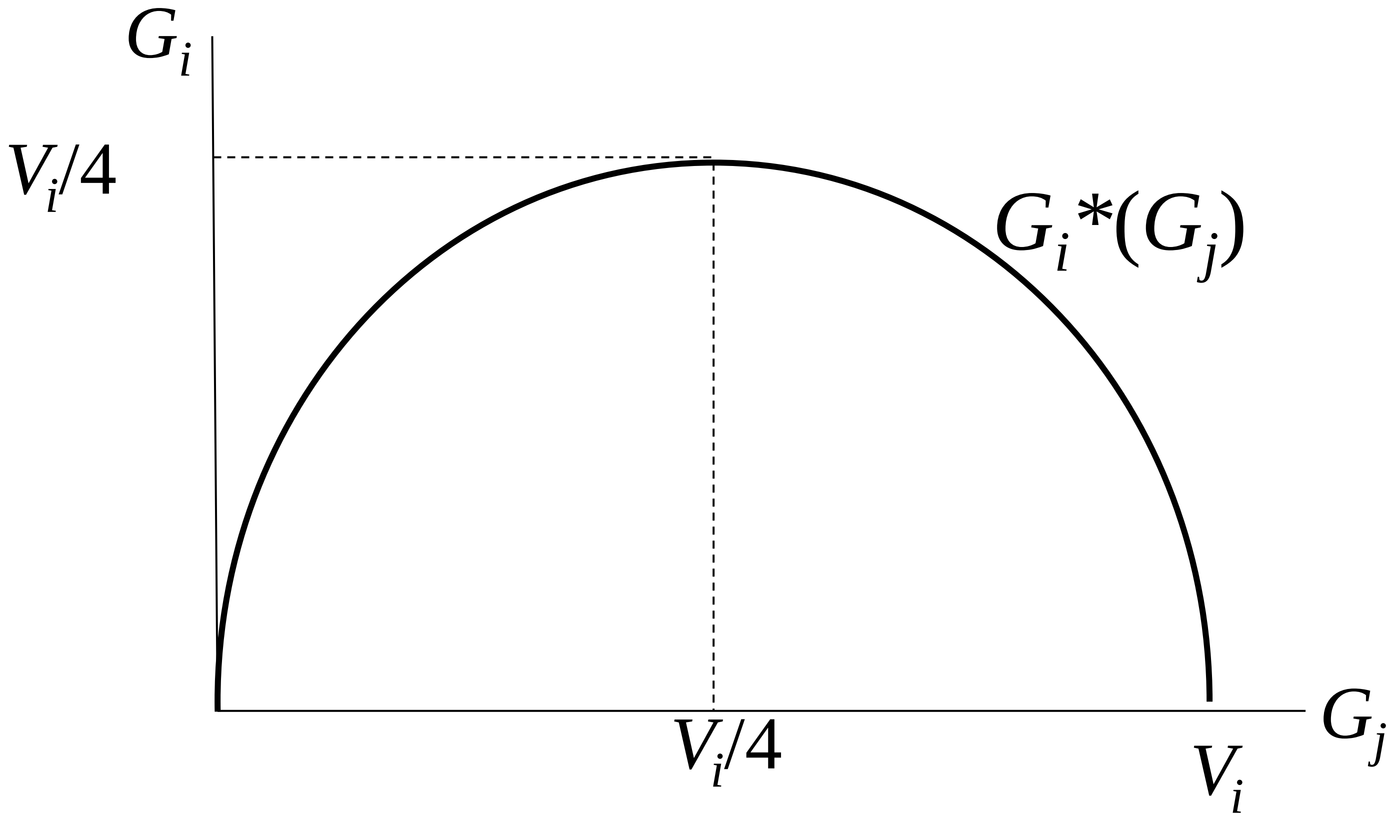
Tornei

- La funzione $p_i(G_i,G_j)$ è detta **funzione di successo nel torneo**, e il torneo è detto **equo** se la funzione ϕ_i è la stessa per tutti i concorrenti.
- Nel caso più semplice (equo, con $\phi_i(G_i) = C_i(G_i) = G_i$):

$$\pi_i(G_i, G_j) = V_i\, G_i/[G_i + G_j] - G_i.$$

- La funzione di risposta ottima si ottiene risolvendo $\partial\pi_i/\partial G_i = 0$ (si noti che $\partial^2\pi_i/\partial G_i^2 < 0$).

In particolare, la funzione di risposta ottima $G_i^*(G_j)$ è data da: $G_i^*(G_j) = [V_i\, G_j]^{1/2} - G_j$



Tornei

- Come si vede dalla funzione di risposta ottima, il concorrente che valuta maggiormente il premio investe di più nella competizione (e tuttavia non ottiene il premio con certezza, *come richiederebbe un'allocazione efficiente*).
- Manipolando:

$$\partial\pi_i/\partial G_i = V_i\, G_j/[G_i + G_j]^2 - 1 = 0,$$
$$\partial\pi_j/\partial G_j = V_j\, G_i/[G_i + G_j]^2 - 1 = 0,$$

Tornei

si ottiene:

- $1/[G_i + G_j] = 1/V_i + 1/V_j$

e perciò

$$G_i^N = [1/V_i + 1/V_j\ ]^{-2}/V_j$$

$$= [(V_i + V_j)/(V_iV_j)]^{-2}/V_j,$$

$$G_i^N + G_j^N = (V_iV_j)/(V_i + V_j),$$

$$p_i^N = V_i/(V_i + V_j),$$

$$\pi_i^N = V_i^3/(V_i + V_j)^2.$$

Attività Sportive

- Si noti che la funzione di *payoff* può essere riscritta (dividendo per V_i) come:

$$\pi_i(G_i, G_j) = G_i/[G_i + G_j] - G_i/V_i.$$

- Nulla cambia dal punto di vista strategico, ma il modello può essere interpretato come una gara tra atleti con diverso costo dell'impegno sportivo ($\underline{C}_i = G_i/V_i$) e premio con comune valore unitario ($\underline{V}_i = 1$).
- In equilibrio, l'atleta "migliore" (quello con V_i maggiore) eserciterà più sforzo e avrà la maggiore probabilità di vincere (ma non vincerà con certezza).

Il caso simmetrico

Se il torneo è equo e i giocatori valuta-no il bene nello stesso modo (V):

$$G_i^N = V/4,$$

$$G_i^N + G_j^N = V/2,$$

$$p_i^N = 1/2,$$

$$\pi_i^N = V/4.$$

Il caso simmetrico

Quando i concorrenti sono $n \geq 2$, si ottiene analogamente

$$G_i^N = (n - 1)V/n^2,$$

$$nG_i^N = (n - 1)V/n,$$

$$p_i^N = 1/n,$$

$$\pi_i^N = V/n^2,$$

il che mostra che la vincita viene di fatto "**dissipata**"dai concorrenti quando n diventa grande ($\lim_{n\to\infty} nG_i^N = V$).

Tornei: conclusione

Con opportune ipotesi i risultati dell'esempio generalizzano a contesti non equi in cui le funzioni di successo sono più complesse, e i concorrenti hanno funzioni di costo dello sforzo differenti (ma non sempre si ottiene unicità degli equilibri o se ne può mostrare l'esistenza).

Il modello è stato molto utilizzato in **economia del lavoro** (Edward Lazear and Sherwin Rosen) e nella **teoria dei comportamenti lobbistici** (Gary Becker).

ASTE

- Le **aste** sono meccanismi attraverso i quali il proprietario di un bene (o di diversi beni) può cederlo ai soggetti interessati contro un pagamento.
- Le regole di funzionamento dell’asta creano dunque una **competizione tra compratori** che può essere analizzata come un gioco.
- Di fatto, ci sono molti tipi diversi di aste comunemente utilizzate: *ascendenti* o inglesi, *discendenti* o olandesi, in *busta chiusa al primo prezzo*, in *busta chiusa al secondo prezzo* o *à la* Vickrey (dal nome dell’economista statunitense William Vickrey, 1911-1996).

ASTE

- Ovviamente il comportamento dei partecipanti all'asta dipende dalle regole della specifica asta. Per esempio, si dimostra che in un'asta *à la* Vickrey offrire di pagare la propria massima disponibilità a spendere per il bene è una strategia dominante.
- Ma un sorpendente risultato noto come **Teorema dell'Equivalenza dei Ricavi** dimostra che (sotto certe condizioni tecniche) il risultato di aste diverse (per esempio quelle citate) è il medesimo, se i partecipanti all'asta hanno un'**informazione incompleta** sulla disponibilità a spendere degli altri partecipanti.

Aste All-pay

- Normalmente in un'asta è solo chi si aggiudica il bene per il quale ha presentato un'offerta che paga, in funzione dell'offerta presentata.
- In un'asta *all-pay* invece, **ogni partecipante paga comunque secondo quanto offerto**.
- In particolare, per sottolineare l'analogia con il caso di un torneo, possiamo scrivere la funzione di *payoff* del giocatore i ($i, j = 1,2$, $i \neq j$):

$$\pi_i(G_i, G_j) = p_i(G_i, G_j)V_i - G_i,$$

Aste All-pay

dove G_i è l'offerta presentata simultaneamente da uno dei due (per semplicità) partecipanti all'asta, V_i è la sua valutazione monetaria (disponibilità a spendere) per il bene messo all'asta, e

$$p_i(G_i,G_j) = 1 \text{ se } G_i > G_j,$$
$$p_i(G_i,G_j) = 0 \text{ se } G_i < G_j,$$
$$p_i(G_i,G_j) = 1/2 \text{ se } G_i = G_j$$

è la probabilità che esso gli venga assegnato (come vincitore dell'asta).

Aste All-pay

- Si capisce facilmente che, date le regole descritte, <u>se i partecipanti hanno un'informazione completa sulla loro reciproca disponibilità a spendere</u>, *non esiste un equilibrio di Nash in strategie **pure***:

1. se $G_i > G_j$ allora l'offerta G_i non è una risposta ottima a G_j (che a sua volta dovrebbe essere strettamente nulla) perché potrebbe essere convenientemente ridotta pur continuando *i* a ricevere il bene con certezza;

Aste All-pay

2. se $G_i = G_j < V_1$ allora l'offerta G_i non è una risposta ottima a G_j, perché aumentando lievemente l'offerta il payoff di *i* aumenterebbe (raddoppiando la probabilità di vincere l'asta e ottenere il bene).

- Assumiamo per semplicità che $V_1 > V_2 > 0$. Hillman e Riley (1989), e Baye *et alii* (1993) e (1996) hanno dimostrato che esiste in tal caso un unico equilibrio di Nash in **strategie miste**.

Aste All-pay

- In tale equilibrio 1 utilizza la distribuzione uniforme $F_1(G_1) = G_1/V_2$ sul supporto $[0,V_2]$, mentre 2 usa $F_2(G_2) = 1 - V_2/V_1 + G_2/V_1$ sullo stesso supporto, dove $F_i(G) = \text{Prob}\{G_i \leq G\}$.

.

- Cioè, 1 fa con la stessa probabilità una qualunque offerta compresa tra 0 e V_2, mentre 2 con probabilità $1 - V_2/V_1$ non offre nulla, e con probabilità V_2/V_1 fa una qualunque offerta tra 0 e V_2 .

Aste All-pay

- Nell'equilibrio descritto il bene viene (**inefficien-temente**) assegnato a 1 con probabilità:

$$1 - V_2/(2V_1) > ½,$$

- e a 2 con probabilità:

$$V_2/(2V_1) < ½.$$

- 1 ottiene un *payoff* (atteso) pari a $V_1 – V_2$, mentre 2 non ottiene nulla in termini attesi e il venditore riceve un pagamento (atteso) pari a:

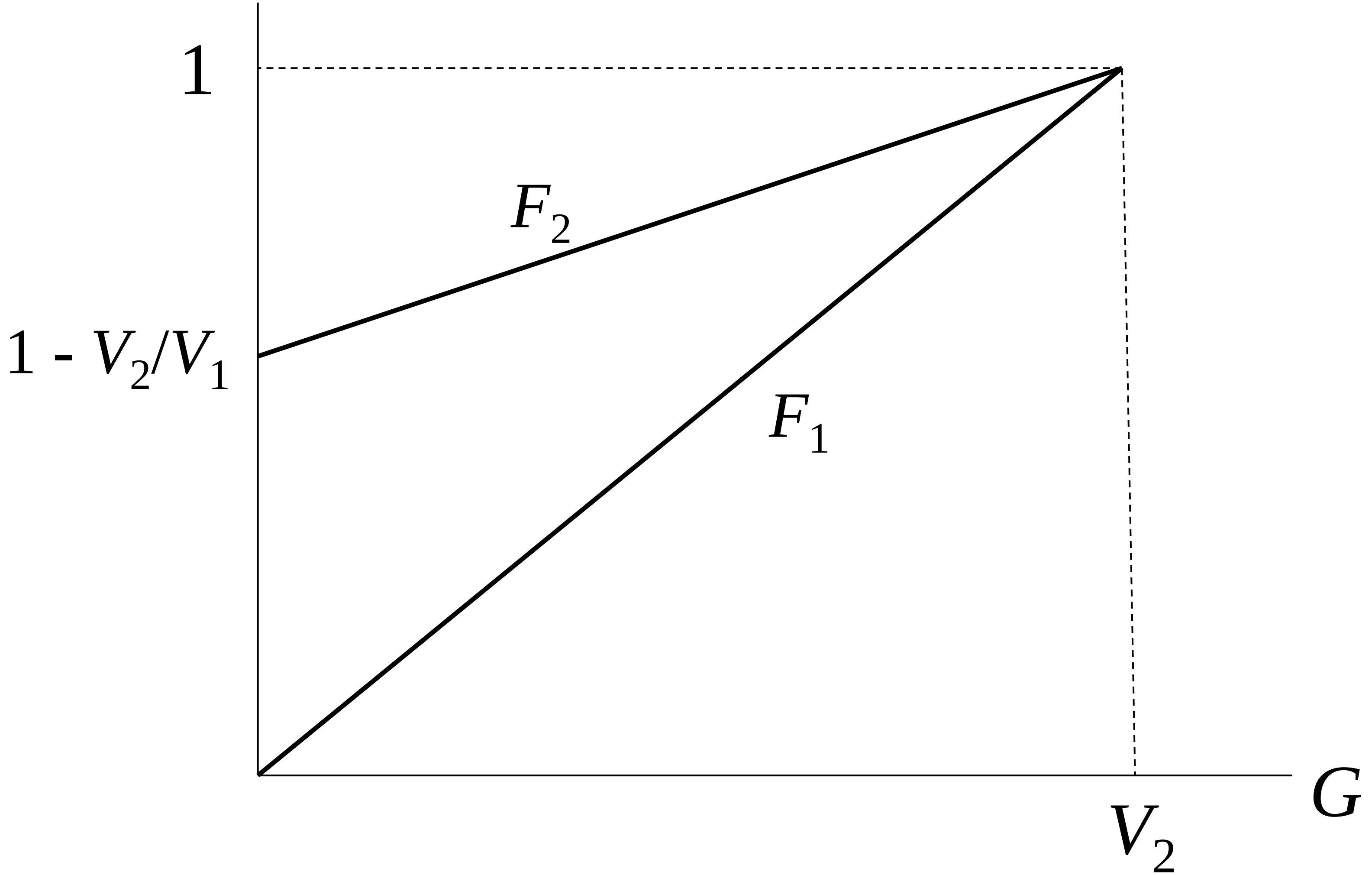
$$V_2/2 + (V_2/V_1)(V_2/2) = V_2\ (1 + V_2/V_1)/2 < V_2.$$

Aste All-pay

- L'intuizione per il risultato è che 1 potrebbe assicurarsi il bene offrendo $G_1 = V_2$, ottenendo un payoff $\pi_1 = V_1 - V_2$ e non lasciando nulla a 2 (questo è il risultato che si otterrebbe in un'asta *à la* Vickrey).
- Ma non sarebbe un equilibrio di Nash se questa fosse una strategia pura contrapposta a $G_2 = 0$.
- Occorre dunque che le strategie miste siano tali che, per ogni offerta G rispettivamente utilizzata:

$$\pi_1 = F_2(G)V_1 - G = V_1 - V_2,$$
$$\pi_2 = F_1(G)V_2 - G = 0.$$

Risolvendo per F_1 e F_2 si ottengono le strategie miste di equilibrio:



Aste All-pay: conclusioni

- La possibilità di una assegnazione inefficiente riduce inoltre il pagamento atteso dal venditore rispetto a V_2, che sarebbe il pagamento nel caso di un'asta *à la* Vickrey (l'idea è che il venditore utilizzi l'asta perché non conosce le valutazioni dei partecipanti, che sono invece reciprocamente note ai partecipanti in questo contesto di informazione completa in cui NON vale il teorema di equivalenza dei ricavi).
- Si noti infine l'analogia con i tornei: il premio viene assegnato a chi offre di più, ma siccome le offerte sono stocastiche di fatto i competitori possono solo influenzare la probabilità di vittoria, sostenendo comunque un costo.

Riferimenti bibliografici

- Baye, M. R., Kovenock, D. and de Vries, C. G. (1993) Rigging the lobbying process: An application of the all-pay auction, *American Economic Review*, 83, 289-94.
- Baye, M. R., Kovenock, D. and de Vries, C. G. (1996) The all-pay auction with complete information, *Economic Theory*, 8, 291-305.
- Becker, G. (1983) A theory of competition among pressure groups for political influence, *Quarterly Journal of Economics*, 98, 371–400.
- Hillman, A. L. and Riley, J. G. (1989) Politically contestable rents and transfers, *Economics and Politics*, 1, 17-39.
- Lazear, E. P., and Rosen, S. (1981) Rank-Order Tournaments as Optimum Labor Contracts, *Journal of Political Economy*, 89(5), 841-864.
- Tullock, G. (1967) The welfare cost of tariffs, monopolies and theft, *Western Economic Journal*, 5, 224–232.
- Vickrey, W. (1961) Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders, *The Journal of Finance*, 16(1), 8-37.