Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 13 marzo 2018 email: anna.torre@unipv.it
sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2018.html

MODALITÀ DI ESAME

- È previsto un appello alla fine del corso: scritto per chi ha diritto a 3 crediti, scritto e orale per chi ha diritto a più crediti;
- Un altro appello in giugno;
- In seguito mi dovete contattare per email

BIBLIOGRAFIA PICCOLA

- Myerson "Game Theory: Analysis of Conflict", Harvard University Press (1991).
- Patrone "Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla teoria dei giochi", PLUS (2006)
- Owen "Game Theory", Academic Press, New York (1995)
- Luce, Raiffa , "Games and Decisions", Wiley, New York (1957).

STRATEGIA DEBOLMENTE DOMINANTE

Dato un gioco a due giocatori in forma strategica

$$(X, Y, f, g),$$

se per un certo $\bar{x}$ e un certo x^*

$$f(\bar{x}, y) \geq f(x^*, y)$$

per ogni $y \in Y$ e per almeno un $\bar{y}$ si ha

$$f(\bar{x}, \bar{y}) > f(x^*, \bar{y}),$$

diciamo che $\bar{x}$ domina debolmente x^*.

STRATEGIA FORTEMENTE DOMINANTE

Dato un gioco a due giocatori in forma strategica

$$(X, Y, f, g),$$

se per un certo $\bar{x}$ e un certo x^*

$$f(\bar{x}, y) > f(x^*, y)$$

per ogni $y \in Y$ diciamo che $\bar{x}$ domina fortemente x^*.
Se $\bar{x}$, domina x^* possiamo supporre che il giocatore I non giocherà x^*.

ELIMINAZIONE ITERATA DI STRATEGIE FORTEMENTE DOMINATE: SUCCESSI

I \ II	x	y	z
A	(2, 1)	(1, 3)	(0, 1)
B	(3, 0)	(2, 2)	(1, 3)
C	(1, 1)	(4,-1)	(-1, 0)
D	(2, 4)	(0, 0)	(-1, 3)

ELIMINAZIONE ITERATA DI STRATEGIE FORTEMENTE DOMINATE: LIMITI

I \ II	x	y	z
A	(2, 1)	(1, 3)	(0, 1)
B	(3, 0)	(2, 2)	(1, 3)
C	(1, 1)	(4,-1)	(2, 0)
D	(2, 4)	(0, 0)	(-1, 3)

EQUILIBRIO DI NASH

Consideriamo il gioco:

$(X,\ Y,\ f,\ g:\ X \times Y \to \mathbf{R})$

dove X e Y sono gli spazi di strategie, e f, g sono le funzioni di utilità dei giocatori

$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ si dice equilibrio di Nash se

1. $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$;
2. $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$.

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

I \ II	S	T
S	(5, 5)	(0, 6)
T	(6, 0)	(1, 1)

Punto di vista di I:

I \ II	S	T
S	(5)	(0)
T	(6)	(1)

Punto di vista di II:

I \ II	S	T
S	(5)	(6)
T	(0)	(1)

La soluzione è: i giocatori giocano entrambi T e prendono 1 ciascuno, ma il risultato è inefficiente.

Equilibri di Nash

Un massimo ombra è un equilibrio di Nash.
Gli elementi ottenuti per eliminazione di strategie fortemente dominate sono equilibri di Nash.
In un gioco in forma estesa a informazione perfetta gli equilibri ottenuti per induzione a ritroso sono equilibri di Nash del corrisponedente gioco in forma strategica.
Ma un equilibrio di Nash può non essere ne un massimo ombra ne ottenuto per eliminazione di strategie fortemente dominate.

Equilibri di Nash

Alla base della definizione di equilibrio di Nash vi sono alcuni presupposti:

- Immaginiamo che i due giocatori si mettano d'accordo per giocare, l'uno la strategia $\bar{x}$ e l'altro la strategia $\bar{y}$.
- I due giocatori effettuano le loro scelte contemporaneamente ed indipendentemente.
- I giocatori non possono effettuare tra di loro degli accordi vincolanti.
- L'accordo deve resistere a considerazioni del tipo seguente da parte per esempio del giocatore I: "visto che se violo l'accordo non mi succede nulla, vediamo se posso far di meglio anzichè giocare la $\bar{x}$. Le possibilità sono due: o II non rispetta l'accordo, e allora inutile tenerne conto, oppure lo rispetta. In questo secondo caso, vediamo se non c'è un'altra strategia x per cui $f(x,\bar{y}) > f(\bar{x},\bar{y})$"

Equilibri di Nash

Affinché $(\bar{x}, \bar{y})$ sia ragionevole occorre che resista a tentazioni di questo tipo, cioè appunto
$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$.
Analoghe considerazioni da parte del giocatore II portano alla condizione $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$

Equilibri di Nash

La definizione di equilibrio di Nash è strutturata in modo da tenere conto di queste considerazioni: le condizioni dicono che nessuno dei giocatori ha convenienza a deviare dalla strategia che gli è “prescritta” dall’equilibrio, a condizione che neppure l’altro giocatore “devii”’.
Di solito, quando si parla di equilibri, si usa chiamarli equilibri di Nash o di Cournot-Nash. La ragione è la seguente:
John F. Nash, ([1950]: Equilibrium Points in n-Person Games, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36, 48-49) prova un importante teorema il quale garantisce l’esistenza di un equilibrio per una classe molto ampia ed importante di giochi, estendendo al caso generale il risultato di von Neumann per i giochi a somma zero (cioè quelli per cui $f(x,y) + g(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in X \times Y$).
Cournot nel 1838 aveva “anticipato” la TdG adottando, come “soluzione” per un modello di oligopolio, proprio questa idea di equilibrio.

LA BATTAGLIA DEI SESSI

I \ II	S	T
S	(2, 1)	(0, 0)
T	(0, 0)	(1, 2)

IL PARI O DISPARI

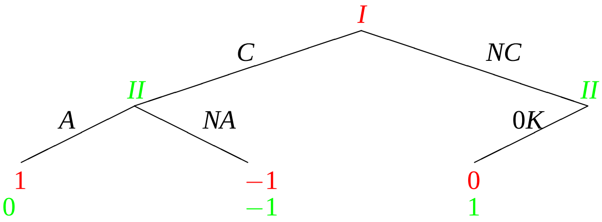
I \ II	S	T
S	(-1, 1)	(1, -1)
T	(1, -1)	(-1, 1)

Questo gioco ha equilibri di Nash? Ha strategie dominate?

FALCHI E COLOMBE

I \ II	F_2	C_2
F_1	(-2, -2)	(2, 0)
C_1	(0, 2)	(1, 1)

FORMA ESTESA del Pallone e Fidanzata



Forma strategica:

I \ II	A	NA
C	(1, 0)	(-1, -1)
NC	(0, 1)	(0, 1)

È RILEVANTE SCEGLIERE PER PRIMI?

I \ II	NP	P
NP	(2, 2)	(0, 3)
P	(3, 0)	(1, 1)

I \ II	S	T
S	(2, 1)	(0, 0)
T	(0, 0)	(1, 2)

I \ II	L	R
T	(-1, 1)	(1,-1)
B	(1,-1)	(-1, 1)

AUMENTARE I PLAYOFF MIGLIORA LA SITUAZIONE?

I \ II	P	D
P	(12, 12)	(102,11)
D	(11,102)	(101, 101)

I \ II	P	D
P	(9, 9)	(99, 10)
D	(10, 99)	(100,100)

SOMMA ZERO

UN GIOCO in forma strategica a due giocatori si dice a somma zero se l'utilità del primo giocatore è l'opposta dell'utilità del secondo. Consideriamo il seguente gioco a sommazero

I \ II	L	R
T	(4, -4)	(1,-1)
B	(3,-3)	(2, -2)

Se si sa che il gioco è a somma zero, la matrice è ridondante perché basta la matrice:

I \ II	L	R
T	4	1
B	3	2

Ragionamenti del giocatore I: se II gioca L a me conviene giocare T, se io gioco T a II conviene giocare R, se II gioca R a me conviene giocare B, se io gioco B a II conviene giocare R, se II gioca R a me conviene giocare B. (B, R) è un equilibrio

minmax e maxmin

I/II	L	R	min	
T	4	1	1	
B	3	2	2	max dei min =2
max	4,	2		
			min dei max=2	

Abbiamo che il min dei max sulle colonne è uguale al max dei min sulle righe! È un caso? No, se abbiamo un equilibrio in un gioco a somma zero, le strategie componenti sono di maxmin=minmax.

ANCHE QUI NON SEMPRE FUNZIONA

Cosa accade quando non è così?

I \ II	t_1	t_2	t_3
s_1	8	3	5
s_2	5	2	-2
s_3	7	6	-3

ho cambiato solo qualche numero. Ancora come prima il primo giocatore elimina la seconda riga e di conseguenza il secondo elimina la prima colonna. Ma a questo punto si ottiene:

I \ II	t_2	t_3
s_1	3	5
s_3	6	-3

e si crea un circolo vizioso.

PARI O DISPARI

In generale non è vero che maxmin=minmax: classico esempio (pari o dispari)

I \ II	L	R
T	-1	1
B	1	-1

Qui $minmax = 1$ e $maxmin = -1$

NASH?

Cosa é un equilibrio di Nash per un gioco a somma zero?

$f(\bar{x},\bar{y}) \geq f(x,\bar{y})$ per ogni $x \in X$

$g(\bar{x},\bar{y}) \geq g(\bar{x},y)$ per ogni $y \in Y$

cioè

$f(\bar{x},\bar{y}) \leq f(\bar{x},y)$ per ogni $y \in Y$

e quindi $f(x,\bar{y}) \leq f(\bar{x},\bar{y}) \leq f(\bar{x},y)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $y \in Y$

Ciò significa che $(\bar{x},\bar{y})$ è un punto di sella per la funzione $f(x,y)$.