# Teoria dei Giochi

**Anna Torre**

Almo Collegio Borromeo 20marzo 2018

email: anna.torre@unipv.it

sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2018.html

# Giochi ripetuti

- Contesto istituzionale non cooperativo;
- Sorgere spontaneo della cooperazione anche se non si possono assumere accordi vincolanti.

# Giochi ripetuti

- Se un gioco viene giocato un’unica volta non c’è alcun motivo per cooperare se non c’è un contratto scritto.

Se viene giocato più volte l’incentivo alla cooperazione è più forte. Si tratta di vedere

come si costruisce una norma sociale.

# Orizzonte temporale

- I comportamenti sono diversi se i giocatori hanno un orizzonte temporale breve o un orizzonte temporale lungo (infinito);
- La differenza tra orizzonte finito e infinito è più una differenza di percezione della durata del gioco da parte dei giocatori che non una situazione effettivamente reale;
- Un modello di orizzonte finito è piu ragionevole quando i giocatori percepiscono chiaramente il periodo finale, mentre quello con orizzonte infinito quando i giocatori, dopo ogni periodo, pensano che il gioco continuerà per un periodo ancora;
- Altrimenti, visto che la vita è finita, potremmo modellizzare solo orizzonte finito.

# Orizzonte temporale finito

- Se il gioco possiede un solo equilibrio di Nash, il gioco ripetuto con orizzonte temporale finito ha un unico equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi che consiste nel giocare ad ogni passo la strategia di equilibrio;
- Se il gioco ha più di un equilibrio di Nash, allora il gioco ripetuto può avere degli equilibri di Nash perfetti nei sottogiochi in cui in qualche passo i giocatori non giocano una strategia di equilibrio del gioco componente.

# Dilemma del prigioniero

Il primo di questi due risultati può essere illustrato analizzando il dilemma del prigioniero:

| I \ II | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | (5, 5) | (1, 6) |
| $B$ | (6, 1) | (2, 2) |

- Questo gioco ha un unico equilibrio di Nash in cui il primo giocatore sceglie B e il secondo sceglie R. Inoltre l'equilibrio di Nash si ottiene anche per eliminazione di strategie strettamente dominate.
- Nel gioco ripetuto, ad ogni stadio le scelte sono simultanee.
- Il gioco ripetuto due volte ha molti equilibri di Nash ma uno solo perfetto nei sottogiochi.
- Rispetto al gioco in una sola mossa la differenza qui è che quando i giocatori scelgono la seconda volta **possono osservare quello che è accaduto la prima**.

# Dilemma del prigioniero

Abbiamo quindi quattro sottogiochi, tutti relativi alla seconda ripetizione, che possiamo classificare così:

- 1) nella prima ripetizione le strategie sono $(T, L)$
- 2) nella prima ripetizione le strategie sono $(T, R)$
- 3) nella prima ripetizione le strategie sono $(B, L)$
- 4) nella prima ripetizione le strategie sono $(B, R)$

La matrice delle vincite del sottogioco 1 è la seguente:

| I \ II | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | (10, 10) | (6, 11) |
| $B$ | (11, 6) | (7, 7) |

L'equilibrio di Nash è dunque $(B, R)$

La matrice delle vincite del gioco $2$ è

| II / I | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | (6, 11) | (2, 12) |
| $B$ | (7, 7) | (3, 8) |

L'equilibrio di Nash è dunque $(B, R)$.

Lo stesso accade per i sottogiochi $3$ e $4$. (Scrivere i payoff)

# Due equilibri:gioco ripetuto 2 volte

| I \ II | $L$ | $R$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | (2, 2) | (0, 5) | (0, 0) |
| $B$ | (5, 0) | (1, 1) | (0, 0) |
| $W$ | (0, 0) | (0, 0) | (-10, -10) |

- payoff di $minmax = 0$,
- payoff dell'equilibrio $(B, R)$ è uguale a $1$.
- In questo gioco sono di equilibrio le strategie:
- II) Gioco $L$ la prima volta e la seconda gioco $R$ se ho osservato $(T, L)$ la prima volta, altrimenti gioco $W$.

# Due equilibri:gioco ripetuto K volte

Il problema è che nel dilemma del prigioniero il payoff di equilibrio coincide con il minmax per ciascuno dei due giocatori e ciò impedisce di punire un giocatore che non aderisca alla strategia collaborativa. Riporto l'esempio del libro di Patrone “Decisori razionali interagenti”:

| I \ II | $L$ | $R$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | (2, 2) | (0, 5) | (0, 0) |
| $B$ | (5, 0) | (1, 1) | (0, 0) |
| $W$ | (0, 0) | (0, 0) | (-1, -1) |

- payoff di $minmax = 0$,
- payoff dell'equilibrio $(B, R) = 1$

# Gioco ripetuto K volte

In questo caso è possibile costruire (fissando $H$ e $K$ opportunamente) un equilibrio di Nash che dà a entrambi i giocatori un payoff vicino a $2$.

- La coppia di strategie che dà un equilibrio di Nash vicino a quello che si otterrebbe giocando sempre $(T, L)$ è la seguente:
- I)Se il numero di ripetizioni è $K$, gioco $T$ all'inizio e continuo fino allo stadio $K - H$ a meno che il giocatore $II$ non giochi qualcosa di diverso da $L$, se questo avviene allora passo a giocare $W$ dallo stadio successivo fino alla fine del gioco. Se invece, giunti allo stadio $K - H$ non c'è stata alcuna deviazione di II dalla strategia $L$ gioco $B$ fino alla fine del gioco.
- II) Strategia analoga

# Perché questo è un equilibrio di Nash?

- Ovviamente negli ultimi $H$ stadi a nessuno conviene deviare perché si gioca un equilibrio.
- Se $I$ devia, allo stadio in cui devia guadagna $3$ in più di quanto guadagnerebbe non deviando, ma successivamente perde almeno $1$ in tutti gli stadi successivi;
- Il suo guadagno complessivo è dunque minore o uguale a $3 - H$;
- Se $H \geq 3$ il guadagno complessivo da quel momento in poi è negativo ed è quindi una perdita.

# Quante ripetizioni per ottenere un risultato vicino a $2$?

- Vogliamo ottenere un risultato maggiore di $2 - \varepsilon$;
- Vogliamo quindi che $2(K - H) + H \geq (2 - \varepsilon) \cdot K$;
- Questo dice $K \geq \frac{H}{\varepsilon}$
- Dunque se $K$ è sufficientemente grande si può superare $2 - \varepsilon$

# Orizzonte temporale infinito

- Tasso di sconto $\delta$: i guadagni in uno stadio successivo sono moltiplicati per un numero $\delta$ con $0 < \delta < 1$ rispetto a quelli dello stadio precedente: $5$ euro domani valgono $5\delta$ euro di oggi.
- Se un gioco viene ripetuto infinite volte, acquistano rilevanza i concetti di minaccia e di punizione, come e più che nel caso di orizzonte finito con più equilibri di Nash.
- Se il dilemma del prigioniero è ripetuto infinite volte, non si può applicare il ragionamento basato sull'induzione a ritroso.
- La minaccia
  **"se non cooperi io non coopererò mai più "** acquista maggior peso.

# Orizzonte infinito:Dilemma del prigioniero

Esempio riferito al dilemma del prigioniero:

| I \ II | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | (5, 5) | (1, 6) |
| $B$ | (6, 1) | (2, 2) |

Supponiamo che entrambi i giocatori adottino la seguente strategia:

- **T** "Nel primo periodo scelgo $T$ e successivamente scelgo $T$ se e solo se in tutti i periodi precedenti ho osservato $(T, L)$, in caso contrario da quel momento in poi scelgo B." (si chiama "trigger strategy")
- **T** "Nel primo periodo scelgo $L$ e successivamente scelgo $L$ se e solo se in tutti i periodi precedenti ho osservato $(T, L)$, in caso contrario da quel momento in poi scelgo $R$."

# Che succede?

Calcoliamo le vincite di ciascun giocatore.

Se entrambi scelgono la strategia **T** sopra scritta ottengono :

$u_I(T) = u_{II}(T) = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + 5\delta^3 + ..... = 5\frac{1}{1-\delta}$

Se $I$ adotta un'altra strategia $D_i$ che al passo i-esimo gli fa scegliere $B$ per la prima volta, e $II$ adotta $T$, ottiene

$u_I(D_i) = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + ..... + 5\delta^{i-1} + 6\delta^i + 2\delta^{i+1} ..... =$

$5 + 5\delta + 5\delta^2 + ......5\delta^{i-1} + 6\delta^i + 2\delta^{i+1} \cdot \frac{1}{1-\delta}$

# Svolgiamo i conti

Si ha
$u_I(D_i) \leq u_I(T) \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{4}$
infatti: $u_I(D_i) \leq u_I(T) \Leftrightarrow 6\delta^i + 2\delta^{i+1}\frac{1}{1-\delta} \leq 5\delta^i + 5\delta^{i+1}\frac{1}{1-\delta} \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{4}$
Analogo discorso si può fare per $II$.
Quindi, se il tasso di sconto è maggiore di $\frac{1}{4}$, la coppia di strategie (**T**,**T**) è un equilibrio di Nash e si potrebbe vedere che è anche perfetto nei sottogiochi..

# Un’altra interpretazione

Analogo risultato si può ottenere se il tasso di sconto viene invece interpretato come la probabilità che un gioco di durata aleatoria prosegua da un dato stadio al successivo.

# Il Folk Theorem

Caratterizza gli equilibri di Nash del dilemma del prigioniero ripetuto infinite volte

| I \ II | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | (5, 5) | (1, 6) |
| $B$ | (6, 1) | (2, 2) |

Si dice ciclo comportamentale un ciclo ripetuto di azioni del tipo:

# Il Folk Theorem

- si gioca (T,L) per $T_1$ volte;
- si gioca (B,R) per $T_2$ volte;
- si gioca (T,R) per $T_3$ volte;
- si gioca (B,L) per $T_4$ volte.

Alla fine si ricomincia a giocare il ciclo e così via; qualche $T_i$ può essere nullo. Un ciclo si dice individualmente razionale se alla fine del ciclo la somma dei payoff per ogni giocatore è maggiore di quello che avrebbe ottenuto giocando sempre l'equilibrio di Nash.

# Il Folk Theorem

Ogni ciclo comportamentale individualmente razionale fornisce per ciascun giocatore strategie che danno luogo a un equilibrio perfetto nei sottogiochi se il fattore di sconto è sufficientemente vicino a $1$;
La strategia di equilibrio per ciascun giocatore è la strategia di ritorsione, cioè si gioca il ciclo comportamentale finché ciascuno dei due lo fa, se uno dei due smette da quel momento in poi si gioca la strategia dell'equilibrio di Nash del gioco componente.

## Strategie di riconciliazione

È possibile la riconciliazione?

- guadagno in caso di defezione
- perdita dovuta alla punizione
- lunghezza del periodo di punizione
- fattore di sconto dei giocatori

# TIT for TAT

Nel caso del dilemma del prigioniero vuol dire:

- I)“Gioco T la prima volta e nei passi successivi gioco esattamente quello che ha giocato II nello stadio precedente”
- II) Analoga
- Si vede che questo è un equilibrio di Nash ma non è perfetto nei sottogiochi.

Proposta da Rapoport Axelrod (1984).

# TIT for TAT

Tit for tat è una strategia molto efficace nella teoria dei giochi per risolvere il problema del dilemma del prigioniero ripetuto.
È stata introdotta da Anatol Rapoport nel 1980 nell'ambito di un concorso organizzato da Robert Axelrod per trovare la migliore strategia per affrontare il dilemma del prigioniero, vincendo il concorso. Il nome, una locuzione inglese che corrisponde all'italiana pan per focaccia (nel senso di ritorsione equivalente), deriva dall'espressione tip for tap che potrebbe essere tradotta con "colpetto per colpetto" ovvero piccola ripercussione a fronte di una piccola provocazione.