ESERCIZIO 1

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x) = x^3 e^{2x-2}$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$

SOLUZIONE:

calcolo $y_0 = f(x_0)$ $\quad\quad$ $y_0 = f(1) = 1$

calcolo $f'(x_0)$ $\quad\quad$ $f'(x) = 3x^2 e^{2x-2} + 2x^3 e^{2x-2} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 5$

la retta tangente ha equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, ovvero è la retta passante per il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ con coefficiente angolare $f'(x_0)$

$$y = 5\,(x-1) + 1 \quad \Rightarrow \quad y = 5x - 4$$

ESERCIZIO 2

Calcolare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=\log_e(x^5+3x+4)$ nel punto di ascissa $x_0=0$

SOLUZIONE:

calcolo $f'(x_0)$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{x^5+3x+4}(5x^4+3) \quad \Rightarrow \quad f'(0)=\dfrac{3}{4}$

coefficiente angolare $m=\dfrac{3}{4}$

ESERCIZI PROPOSTI

1. scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ nel punto di ascissa $x_0=0$

2. calcolare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f(x)=\log_e\sqrt{2-x^2}$ nel punto di ascissa $x_0=1$

ESERCIZIO 3

Determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x) = x^5 - 5x^4$ sull'intervallo $[-1, \quad 5]$

SOLUZIONE:
La funzione è derivabile per tutti gli x reali. Cerco gli eventuali massimi e minimi relativi studiando la derivata prima

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x-4)$$

$f'(x) = 0$, $5x^3(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = 4 \qquad f'(x) \geq 0$, $5x^3(x-4) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0, \quad x \geq 4$

segue:

$x = 0$ punto di massimo relativo, $f(0) = 0$ valore di massimo relativo
$x = 4$ punto di minimo relativo, $f(4) = -256$ valore di minimo relativo

Calcolo i valori della funzioni agli estremi dell'intervallo: $f(-1) = -6$, $f(5) = 0$.

$y = 0$ valore di massimo assoluto assunto in $x = 0$ e $x = 5$
$y = -256$ valore di minimo assoluto assunto in $x = 4$

ESERCIZIO 3

Determinare gli intervalli di monotonia per la seguente funzione $y = 5\,e^{-(x-3)^2}$

SOLUZIONE

$$y' = 5\,e^{-(x-3)^2} \cdot (-2)(x-3) = -10(x-3)\,e^{-(x-3)^2}$$

studio il segno della derivata prima: $y' \geq 0$

1. $e^{-(x-3)^2} \geq 0 \quad \forall x \in R$
2. $-10(x-3) \geq 0$ per $x \leq 3$

la funzione risulta:

- *strettamente crescente* per $x < 3$
- *strettamente decrescente* per $x > 3$
- ha un *massimo relativo* in $x = 3$ con valore $y(3) = 5$

ESERCIZI – Calcolo di derivate con le regole di derivazione

1. $y = x^5 + e^{3x}$ *derivata della somma* $y' = 5x^4 + 3e^{3x}$

2. $\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}$ *funzione composta* $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 + 1)^2}} \cdot (3x^2 + 4x)$

3. $y = \dfrac{x^2 + 2}{e^{3x}}$ *derivata del quoziente* $y' = \dfrac{2xe^{3x} - 3e^{3x}(x^2 + 2)}{(e^{3x})^2}$

4. $y = \sqrt[4]{x^3} \cdot e^{5x+2}$ *derivata di un prodotto* $y' = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} \cdot e^{5x+2} + 5\sqrt[4]{x^3} \cdot e^{5x+2}$

5. $y = \log_e \dfrac{x+1}{x+2}$ $y' = \dfrac{x+2}{x+1} \cdot \dfrac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$