Funzione Composta

Date due funzioni $g : A \to B$ e $f : B \to C$ si può definire la funzione composta:

$$f \circ g : A \to C \qquad x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$$

notazione funzionale $\qquad (f \circ g)(x) = f(g(x))$

La composizione ha senso se il valore $g(x)$ appartiene al dominio della funzione f.

Il campo di esistenza della funzione composta è costituito dai soli valori di x per i quali la composizione funzionale ha senso.

ESEMPI

- $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x^2 - 4 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ con $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = x - 7 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x-7}$ con $D = \{x \in \mathbb{R} :\ x \neq 7\}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ con $D = \mathbb{R}$

Funzione Composta

Esercizio 1. Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x + 1$,

- dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;
- dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x+1}$ definita per $x \geq -\frac{1}{2}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2\sqrt{x} + 1$ definita per $x \geq 0$.

Esercizio 2. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$,

- dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;
- dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = (x+1)^2$, $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$.

Entrambe le funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Funzione Inversa

Una funzione biunivoca è invertibile, cioè:

se $f : D \to C$ è biunivoca, possiamo definire la funzione inversa f^{-1}

$$f^{-1} : C \to D, \quad x = f^{-1}(y)$$

per ogni $y \in C$, x è l'unico punto di D tale che $f(x) = y$

Un tale x esiste ed è unico perché la funzione f è biunivoca.

ESEMPI

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = 2x + 1$
  $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1)$

- $f : (-\infty, 0] \to [0, +\infty), \;\; f(x) = x^2$
  $f^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 0], \;\; f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

Proprietà della Funzione Inversa

Sia $f : D \to C$ invertibile e sia $f^{-1} : C \to D$ la sua funzione inversa.

Consideriamo la funzione composta $f^{-1} \circ f$:

$$f^{-1} \circ f : \ x \in D \ \mapsto \ f(x) \in C \ \mapsto \ f^{-1}\Big(f(x)\Big) = x \in D$$

In altre parole, $f^{-1} \circ f : D \to D$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ è la *funzione identità* su D.

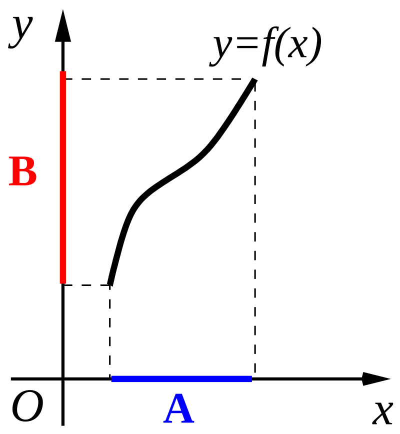
Analoga proprietà vale per $f \circ f^{-1}$:

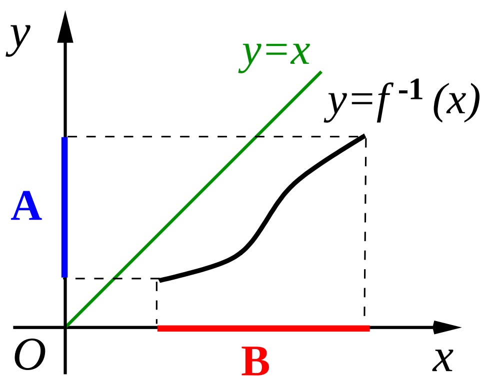
$$f \circ f^{-1} : \ y \in C \ \mapsto \ f^{-1}(y) \in D \ \mapsto \ f\Big(f^{-1}(y)\Big) = y \in C$$

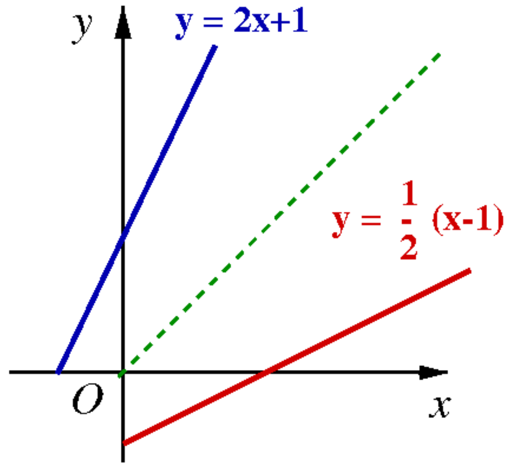
In altre parole, $f \circ f^{-1} : C \to C$, $(f \circ f^{-1})(y) = y$ è la *funzione identità* su C.

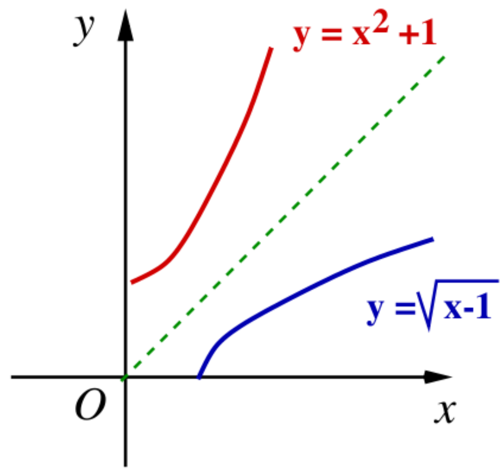
Grafico della Funzione Inversa

Il grafico di f^{-1} si ottiene per simmetria rispetto alla retta $y = x$.









Ancora sulla Funzione Inversa

ATTENZIONE: non confondere la funzione inversa f^{-1} con la funzione reciproco $\dfrac{1}{f}$!!!

Esempio 1. Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$.

La funzione inversa è $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{3}$.

La funzione reciproco è $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{3x}$.

Esempio 2. Consideriamo $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$.

La funzione inversa è $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

La funzione reciproco è $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^2}$.

Criterio di Invertibilità

- Le funzioni strettamente monotone sono iniettive.
- CRITERIO DI INVERTIBILITÀ:

  se f è strettamente monotona e surgettiva, allora f è invertibile.
- Se $f : D \to C$ è invertibile, allora

  f crescente $\Leftrightarrow$ f^{-1} crescente

  f decrescente $\Leftrightarrow$ f^{-1} decrescente

Esercizi sulle Funzioni Inverse

Esercizio 1. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = -x+3$, dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa.

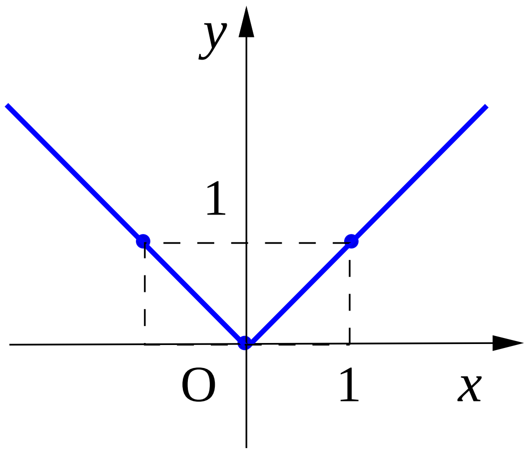
Soluzione: la funzione è biunivoca e l'inversa è $f^{-1}(y) = -y + 3$.

Esercizio 2. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = x^2 + 2x + 1$, dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa.

Soluzione: la funzione non è invertibile in quanto non è né iniettiva, né surgettiva. Per renderla surgettiva basta pensarla a valori in $\mathbb{R}_+$ e per renderla iniettiva basta, per esempio, restringerla a $[-1, +\infty)$. Dunque, la funzione $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = x^2+2x+1$ è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to [-1, +\infty), \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1.$$

Funzione Valore Assoluto



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ:

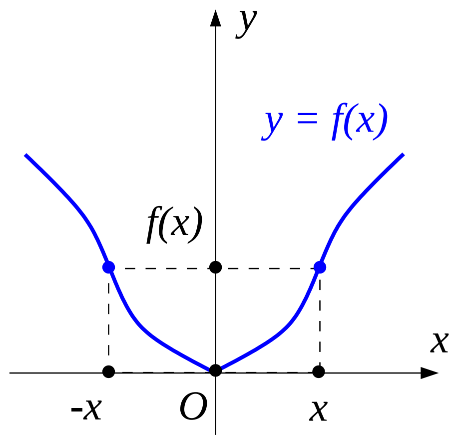
- $|x| \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$
- $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|} \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_2 \neq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- *disuguaglianza triangolare:*
  $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- se $\delta > 0$, $\; |x| \leq \delta \;\Leftrightarrow\; -\delta \leq x \leq \delta$
  $|x - x_0| \leq \delta \;\Leftrightarrow\; x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$

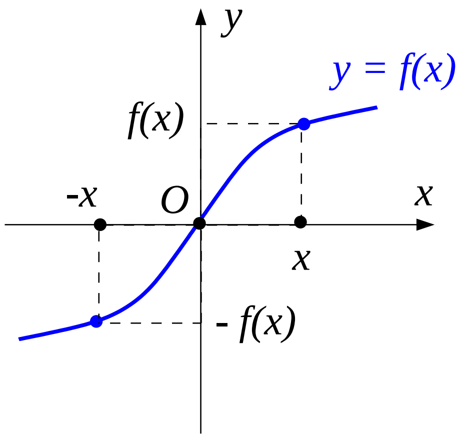
Funzioni Pari e Dispari

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

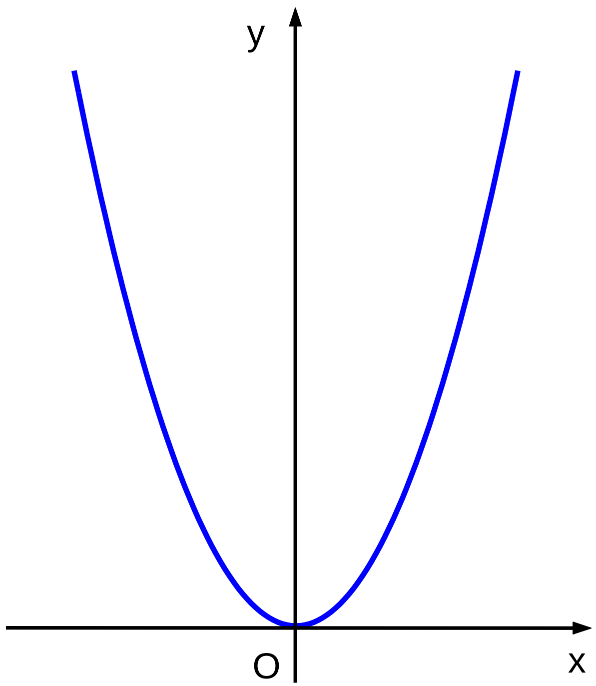
- PARI: se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  In questo caso il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y
- DISPARI: se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  In questo caso il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'origine O
- ESEMPI: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{2n}$, $f(x) = |x|$ funzioni pari

  $f(x) = x$, $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ funzioni dispari



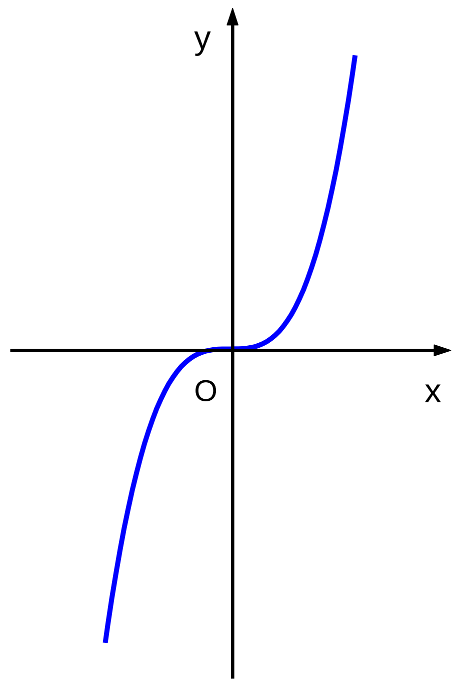


Potenze con Esponente Intero Positivo



$$y = f(x) = x^2$$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ funzione pari



$$y = g(x) = x^3$$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione dispari

Il grafico di x^n è qualitativamente simile a quello di x^2 se n è *pari* o a quello di x^3 se n è *dispari*.