

## Funzioni Continue

---

**Continuità in un punto:** una funzione  $f$  si dice *continua* in un punto  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

cioè,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

**Continuità in un intervallo:** una funzione  $f$  è *continua* in un intervallo  $[a, b]$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in (a, b), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

**GRAFICAMENTE:** una funzione definita su un intervallo è *continua* se è possibile disegnarne il grafico con un tratto *continuo*, senza staccare la penna dal foglio.

# Funzioni Continue – Operazioni

---

## SOMMA, PRODOTTO, QUOZIENTE

Dalle proprietà delle operazioni sui limiti segue che la somma, il prodotto e il quoziente di funzioni continue sono funzioni continue.

Se  $f$  e  $g$  sono continue in  $x_0$ , cioè,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ , si ha:

- $f + g$  è continua in  $x_0$ , cioè,  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$ .
- $f \cdot g$  è continua in  $x_0$ , cioè,  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = f(x_0)g(x_0)$ .
- se  $g$  è diversa da zero in un intorno di  $x_0$ ,  $\frac{f}{g}$  è continua in  $x_0$ , cioè,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

## FUNZIONE INVERSA

Se  $f$  è continua e invertibile, allora anche la *funzione inversa*  $f^{-1}$  è continua.

## Funzioni Continue – Esempi

---

Le seguenti funzioni sono *continue* nei rispettivi *campi di esistenza*:

1. la funzione valore assoluto  $|x|$
2. le funzioni potenza ad esponente reale  $x^b$
3. i polinomi  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$
4. le funzioni razionali (*quozienti di due polinomi*)
5. le funzioni esponenziali  $a^x$  e le loro inverse (le funzioni logaritmiche  $\log_a x$ )
6. le funzioni  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  e le loro inverse
7. ...

## Esempio

---

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1}$ .

La funzione  $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1}$  è una funzione razionale fratta, quindi è continua in tutti i punti dove è definita, cioè in  $\mathbb{R} - \{1\}$ . Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1} = \frac{3 \cdot 2^3 + 2^2 + 1}{2 - 1} = 29.$$

**Attenzione:** NON usare la regola dei termini di grado massimo! Tale regola vale **solo** per il limite di una funzione razionale fratta quando  $x \rightarrow +\infty$  o quando  $x \rightarrow -\infty$  !

## Limite di Funzione Composta

---

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni per cui abbia senso  $f \circ g$ . Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

e che  $f$  sia **continua** in  $L$ . Allora si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right).$$

**Esempi:** (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+1}{x}} = \sqrt{4} = 2$

## Continuità della Funzione Composta

---

Supponiamo che:

- $g$  continua in  $x_0$ , cioè,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$
- $f$  continua in  $y_0 = g(x_0)$ , cioè,  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(y_0)$

Allora  $f \circ g$  è continua in  $x_0$ , cioè,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

**Esempi:** le funzioni  $f_1(x) = \sqrt[3]{7 + e^x}$ ,  $f_2(x) = \log_{10}(9 + e^{1-x})$  sono continue dove sono definite. Pertanto, ad esempio,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{7 + e^x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \log_{10}(9 + e^{1-x}) = 1$$

## Esempi di Discontinuità

---

**Esempio 1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad f(0) = 1.$$

**Esempio 2.**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

## Esempi di Discontinuità

---

**Esempio 3.**  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

**Esempio 4.** Non esiste  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

## Esercizi sulle Funzioni Continue

---

**Esercizio 1.** Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in  $\mathbb{R}$ :

- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{per } x \leq 1 \\ |x| + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$

- $g(x) = \begin{cases} 3x^3 - 2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

- $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

## Esercizi sulle Funzioni Continue

---

**Esercizio 2.** Determinare per quali valori del parametro  $k$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 + x + 2 - k & \text{per } x \leq 0 \\ \sqrt{x^4 + 1} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

è continua in tutto il suo insieme di definizione.

**Esercizio 3.** Determinare per quali valori del parametro  $k$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^5 - 3k & \text{per } x < 1 \\ 2k e^{x-1} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

è continua in tutto il suo insieme di definizione.