

Concentrazioni

Una *soluzione* è un sistema omogeneo prodotto dallo scioglimento di una sostanza solida, liquida o gassosa (*soluto*), in un opportuno liquido (*solvente*).

Definiamo **concentrazione** di una soluzione il rapporto tra il peso del soluto e il peso totale della soluzione (*espressi nella stessa unità di misura*).

$$C = \frac{\text{peso del soluto}}{\text{peso della soluzione}} \quad \text{concentrazione}$$

ESEMPI: (g = grammi)

- Sciogliendo 25 g di sale in 100 g di acqua si ottiene una soluzione con una concentrazione $C = \frac{25}{125} = 0.2$
- Su 75 g di soluzione sono presenti 9 g di soluto $\Rightarrow C = \frac{9}{75} = 0.12$
- In 1000 g di soluzione, con concentrazione nota $C = 0.15$, sono presenti 150 g di soluto

Concentrazioni

- Il rapporto

$$C = \frac{\text{peso soluto}}{\text{peso soluzione}}$$

di due grandezze della stessa specie è un *numero puro*, ossia non dipende dall'unità di misura usata per valutare le due grandezze.

- La concentrazione C calcolata negli esempi precedenti non cambia misurando la quantità di soluto e solvente in chilogrammi, libbre, . . .
- Quando si ha a che fare col rapporto di grandezze omogenee si usa esprimere questo rapporto in forma di **percentuale**.
Si dice che le soluzioni degli esempi precedenti sono rispettivamente concentrate al 20%, 12% e al 15%.

Nella realtà:

- in chimica generale si utilizzano i g/L per preparare le soluzioni, ma spesso le concentrazioni sono espresse in moli/L
- per livelli molto bassi di concentrazione si usano unità di misura diverse (la concentrazione di un *inquinante* nel terreno andrebbe espressa ad esempio in mg/Kg): si usano le *parti per milione* (ppm)

Concentrazioni – Esercizi

Problema 1. Aggiungendo 50 g di soluto a una soluzione al 5% si ottiene una soluzione finale al 6%. Calcolare il peso iniziale della soluzione.

Soluzione: poniamo

x peso iniziale della soluzione

$x + 50$ peso finale della soluzione

$\frac{5}{100}x$ peso iniziale del soluto

$\frac{5}{100}x + 50$ peso finale del soluto

La concentrazione finale è data da

$$\frac{\frac{5}{100}x + 50}{x + 50} = \frac{6}{100} \Leftrightarrow \frac{5}{100}x + 50 = \frac{6}{100}(x + 50) \Leftrightarrow \frac{x}{100} = 47 \Leftrightarrow x = 4700 \text{ g}$$

Concentrazioni – Esercizi

Problema 1. Aggiungendo 50 g di soluto a una soluzione al 5% si ottiene una soluzione finale al 6%. Calcolare il peso iniziale della soluzione.

Soluzione alternativa: sia x il peso iniziale del soluto e y il peso iniziale del solvente. Valgono le relazioni:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{5}{100} \Leftrightarrow 95x - 5y = 0$$

$$\frac{x+50}{x+y+50} = \frac{6}{100} \Leftrightarrow 94x - 6y = -4700$$

Risolviamo per sostituzione il sistema lineare:

$$\begin{cases} 95x - 5y = 0 \\ 94x - 6y = -4700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19x \\ 94x - 114x = -4700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 235 \\ y = 4465 \end{cases}$$

Il peso iniziale della soluzione è $x + y = 235 + 4465 = 4700$ g.

Concentrazioni – Esercizi

Problema 2. Aggiungendo 100 g di solvente a una soluzione al 5% si ottiene una soluzione finale al 4%. Calcolare il peso iniziale della soluzione.

Soluzione: poniamo

x peso iniziale della soluzione

$x + 100$ peso finale della soluzione

$\frac{5}{100}x$ peso iniziale e finale del soluto

L'espressione della concentrazione finale è data da

$$\frac{\frac{5}{100}x}{x + 100} = \frac{4}{100} \Leftrightarrow \frac{5}{100}x = \frac{4}{100}(x + 100) \Leftrightarrow x = 400 \text{ g}$$

Concentrazioni – Esercizi

Problema 2. Aggiungendo 100 g di solvente a una soluzione al 5% si ottiene una soluzione finale al 4%. Calcolare il peso iniziale della soluzione.

Soluzione alternativa: sia x il peso iniziale del soluto e y il peso iniziale del solvente. Valgono le relazioni:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{5}{100} \Leftrightarrow 95x - 5y = 0$$

$$\frac{x}{x+y+100} = \frac{4}{100} \Leftrightarrow 96x - 4y = 400$$

Risolviamo per sostituzione il sistema lineare:

$$\begin{cases} 95x - 5y = 0 \\ 96x - 4y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19x \\ 96x - 76x = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 380 \end{cases}$$

Il peso iniziale della soluzione è $x + y = 20 + 380 = 400$ g.

Concentrazioni – Esercizi

Problema 3. Avendo 10 Kg di una soluzione al 30% e 20 Kg della medesima soluzione (*stesso solvente e stesso soluto*) al 10%, quanto solvente si deve aggiungere alla prima e quanto soluto si deve aggiungere alla seconda per renderle entrambe al 20%?

Soluzione alla prima domanda: la prima soluzione contiene $\frac{30}{100} \cdot 10 = 3$ Kg di soluto. Per diminuirne la concentrazione si deve aggiungere una quantità x di solvente in modo tale che

$$\frac{3}{10 + x} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow 300 = 200 + 20x \Leftrightarrow x = 5 \text{ Kg}$$

Soluzione alla seconda domanda: la seconda soluzione contiene $\frac{10}{100} \cdot 20 = 2$ Kg di soluto. Per aumentarne la concentrazione si deve aggiungere una quantità y di soluto in modo tale che

$$\frac{2 + y}{20 + y} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow 200 + 100y = 400 + 20y \Leftrightarrow y = 2.5 \text{ Kg}$$

Concentrazioni – Esercizi

Problema 4. Dati 5 Kg di una soluzione al 10% e 10 Kg della medesima soluzione (*stesso solvente e stesso soluto*) al 15%, quale è la concentrazione della soluzione ottenuta mescolandole?

Soluzione:

$$\frac{10}{100} \cdot 5 = 0.5 \text{ Kg} \quad \text{quantità di soluto nella prima soluzione}$$

$$\frac{15}{100} \cdot 10 = 1.5 \text{ Kg} \quad \text{quantità di soluto nella seconda soluzione}$$

$$\left(\frac{10}{100} \cdot 5 + \frac{15}{100} \cdot 10 \right) = 2 \text{ Kg} \quad \text{quantità di soluto nella soluzione finale}$$

$$5 + 10 = 15 \text{ Kg} \quad \text{peso della soluzione finale}$$

La concentrazione finale è $\frac{2}{15} \approx 0.133$; dunque la soluzione finale è al 13.3% circa.

Concentrazioni – Esercizi

Problema 4 (variante). Date due soluzioni S_1 e S_2 dello stesso solvente e stesso soluto, la prima al 10% e la seconda al 4%, calcolare la concentrazione della soluzione ottenuta mescolando 6 parti di S_1 e 3 parti di S_2 .

Soluzione:

$$\frac{10}{100} \cdot 6P = 0.6P \quad \text{quantità di soluto nella prima soluzione}$$

$$\frac{4}{100} \cdot 3P = 0.12P \quad \text{quantità di soluto nella seconda soluzione}$$

$$\left(\frac{10}{100} \cdot 6P + \frac{4}{100} \cdot 3P \right) = 0.72P \quad \text{quantità di soluto nella soluzione finale}$$

$$(6 + 3)P = 9P \quad \text{peso della soluzione finale}$$

La concentrazione finale è

$$\frac{\frac{10}{100} \cdot 6P + \frac{4}{100} \cdot 3P}{9P} = \frac{10}{100} \cdot \frac{6}{9} + \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{9} = 0.08.$$

Dunque la soluzione finale è all'8%.

Concentrazioni – Esercizi

Problema 5. Sono date due soluzioni dello stesso soluto e dello stesso solvente, la prima al 10% e la seconda al 20%. In quali percentuali si deve mescolarle per ottenere una soluzione al 12%?

Soluzione: indichiamo con x la percentuale della prima soluzione. La percentuale della seconda soluzione sarà $100 - x$.

Deve valere:

$$\begin{aligned} \frac{x}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{100 - x}{100} \cdot \frac{20}{100} &= \frac{12}{100} && \Leftrightarrow & 10 \frac{x}{100} + 20 \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 12 \\ &&& \Leftrightarrow & -10 \frac{x}{100} = -8 && \Leftrightarrow & x = 80 \end{aligned}$$

Le percentuali sono: 80% della prima soluzione e 20% della seconda soluzione.

Concentrazioni – Esercizi

Problema 6. Sono date due soluzioni dello stesso soluto e dello stesso solvente, la prima al 10% e la seconda al 4%. In quale proporzione occorre mescolarle per ottenere una soluzione all'8%?

Scrivere i risultati sotto forma di frazione con numeratore e denominatore interi.

Soluzione: indichiamo con P_1 e P_2 le quantità (ad esempio espresse in g) della soluzione 1 e della soluzione 2 da mescolare per ottenere la soluzione richiesta.

Siamo interessati a conoscere $\frac{P_1}{P_2}$.

La quantità di soluto contenuta nella prima soluzione è $\frac{10}{100}P_1$ mentre la quantità di soluto contenuta nella seconda soluzione è $\frac{4}{100}P_2$. Calcoliamo la concentrazione della soluzione che si ottiene mescolandole:

$$\frac{\frac{10}{100}P_1 + \frac{4}{100}P_2}{P_1 + P_2} = \frac{8}{100}$$

Da questa equazione otteniamo: $10\frac{P_1}{P_2} + 4 = 8\left(\frac{P_1}{P_2} + 1\right) \Leftrightarrow 2\frac{P_1}{P_2} = 4 \Leftrightarrow \frac{P_1}{P_2} = 2$

Concentrazioni – Esercizi

Problema 7. Si dispone di una soluzione S_1 con concentrazione incognita e di una soluzione S_2 , dello stesso soluto e dello stesso solvente, concentrata al 20%. Determinare la concentrazione incognita, sapendo che miscelando 2 parti di S_1 con 3 parti di S_2 si ottiene una soluzione concentrata al 30%.

Soluzione: indichiamo con x la concentrazione incognita.

Si ha che

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{x}{100} + \frac{3}{5} \cdot \frac{20}{100} = \frac{30}{100}$$

da cui $x = 45$.

Cifre Significative

La misura sperimentale di una grandezza è inevitabilmente approssimata a causa degli errori di osservazione, dei limiti della strumentazione, ecc. Si utilizzano quindi notazioni del tipo

$$a = (12.35 \pm 0.01) \text{ m}$$

per indicare che la misura di a è affetta da una **incertezza** di 1 cm.

Cifre significative: si esprime una misura sperimentale (o in generale affetta da errori) riportando solo le cifre **sicure** e la prima cifra **incerta**. Ad esempio, scriviamo:

$$a \approx 12.35 \text{ m} \quad \textit{rappresentazione con 4 cifre significative}$$

Troncamento e Arrotondamento

Troncamento: si trascurano le cifre decimali che non interessano.
Ad esempio,

$$\begin{aligned}\pi = 3.141592653\dots &\rightarrow \pi \approx 3.14 && \text{(con 2 cifre decimali)} \\ &\rightarrow \pi \approx 3.1415 && \text{(con 4 cifre decimali)}\end{aligned}$$

$$e = 2.71828\dots \rightarrow e \approx 2.71 \quad \text{(con 2 cifre decimali)}$$

Arrotondamento: si prende la migliore approssimazione con numero di cifre decimali fissato. Ad esempio,

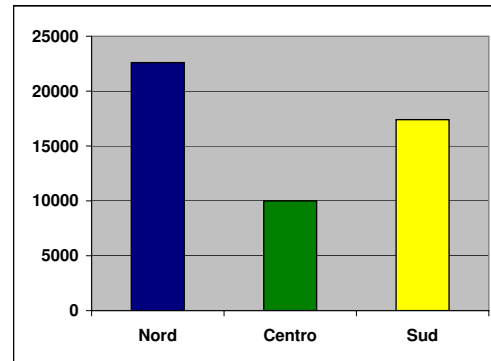
$$\begin{aligned}\pi = 3.141592653\dots &\rightarrow \pi \approx 3.14 && \text{(con 2 cifre decimali)} \\ &\rightarrow \pi \approx 3.1416 && \text{(con 4 cifre decimali)}\end{aligned}$$

$$e = 2.71828\dots \rightarrow e \approx 2.72 \quad \text{(con 2 cifre decimali)}$$

Percentuali – Esercizi

La popolazione di una nazione risulta geograficamente distribuita come in tabella:

area	abitanti	%
Nord	22600	45
Centro	10000	20
Sud	17400	35
totale	50000	



(istogramma - aree dei rettangoli proporzionali al numero di abitanti)

- Esprimere gli abitanti delle varie aree geografiche, in forma percentuale, arrotondata a un numero intero.

$$\text{percentuale nord} = 100 \cdot (22600/50000) = 45.2 \approx 45\%$$

- Una malattia ha una prevalenza (la prevalenza di una malattia è la percentuale degli individui che sono affetti da tale malattia) dell'1% al nord, del 2% al sud ed è inesistente al centro. Calcolare la prevalenza sul totale della popolazione, arrotondata alla seconda cifra decimale:

$$\text{prevalenza} = 100 \cdot \frac{22600 \cdot 0.01 + 17400 \cdot 0.02}{50000} = 1.148 \approx 1.15\%$$

Percentuali – Esercizi

Esercizio 2. Una ditta è composta da 50 filiali. Nell'ultimo anno, il 40% delle filiali ha maturato un saldo attivo di 100 Euro, il 30% ha maturato un saldo attivo di 50 Euro e le restanti hanno riportato un passivo di 60 Euro. Qual è il saldo complessivo della ditta?

$$\text{saldo complessivo} = 0.4 \cdot 50 \cdot 100 + 0.3 \cdot 50 \cdot 50 - 0.3 \cdot 50 \cdot 60 = 1850 \text{ Euro}$$

Esercizio 3. Un'epidemia di influenza colpisce il 40% dei bambini che non hanno ancora compiuto dieci anni e il 10% delle persone di età maggiore o uguale di dieci anni. Sapendo che si è ammalato di influenza il 20% della popolazione, calcolare la percentuale dei bambini al di sotto dei dieci anni rispetto all'intera popolazione ed esprimere il risultato sotto forma di frazione e di percentuale con una cifra decimale arrotondata.

Indichiamo con x la percentuale dei bambini sull'intera popolazione. Sappiamo che è malato:

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{x}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{100 - x}{100} = \frac{20}{100} \quad \text{da cui} \quad x = \frac{1000}{30},$$

cioè la percentuale dei bambini sull'intera popolazione è il 33.3%.

Percentuali – Esercizi

Esercizio 4. Un conto corrente bancario dà il 3% lordo di interesse annuo. Tali interessi sono tassati al 27%. Calcolare il rendimento netto del conto.

Se C è il capitale depositato sul conto

$$\frac{3}{100} \cdot C \text{ interessi lordi} \quad \frac{27}{100} \cdot \frac{3}{100} \cdot C \text{ tasse}$$
$$\frac{3}{100} \cdot C - \frac{27}{100} \cdot \frac{3}{100} \cdot C = \left(1 - \frac{27}{100}\right) \cdot \frac{3}{100} \cdot C = \frac{73}{100} \cdot \frac{3}{100} \cdot C = \frac{2.19}{100} \cdot C$$

rendimento netto del 2.19%

Esercizio 5. Il 20% degli studenti che si presentano all'esame di matematica conosce l'enunciato del "Teorema del limite centrale", tra quelli che conoscono l'enunciato il 30% ne conosce anche la dimostrazione. Sapendo che 3 studenti conoscono sia l'enunciato che la dimostrazione del teorema, scrivere il numero N degli studenti che si presentano all'esame di matematica.

Deve valere la seguente relazione:

$$\frac{30}{100} \cdot \frac{20}{100} \cdot N = 3 \Leftrightarrow N = 50$$

Percentuali – Esercizi

Esercizio 6. Una nazione è divisa in due aree geografiche: “Est” con 10 milioni di abitanti e “Ovest” con 20 milioni di abitanti. Un anno fa il reddito medio pro-capite era lo stesso nelle due aree geografiche. Nel corso dell’ultimo anno il reddito medio pro-capite degli abitanti dell’Est è cresciuto del 10%, mentre il reddito medio pro-capite della popolazione totale è cresciuto soltanto del 2%. Dire se i due dati sono compatibili e calcolare la variazione del reddito medio pro-capite degli abitanti dell’Ovest.

Indicando con x la variazione percentuale di reddito a Ovest, si ha

$$\frac{2}{100} = \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{x}{100} \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -2 \Leftrightarrow \text{variazione in negativo del } 2\%$$

Percentuali – Esercizi

Esercizio 7. Il capitale C viene investito per due anni. Il primo anno gli interessi sono del 6%. Il secondo anno il capitale, comprensivo degli interessi del primo anno, viene reinvestito al 10%. Sapendo che alla fine di queste operazioni il capitale totale è di 17490 Euro, calcolare a quanto ammontava il capitale C all'inizio delle operazioni?

$C = 15000$ Euro

Esercizio 8. Una compagnia di telefonia mobile applica la seguente tariffa: 25 cent alla risposta e 15 cent al minuto. Un'altra compagnia applica invece la tariffa di 20 cent al minuto senza scatto alla risposta. Esiste un tempo di telefonata per cui le tariffe sono uguali?

5 minuti

Esercizio 9. In un Paese l'inflazione è stata del 10% nel 2009, del 12% nel 2010 e del 15% nel 2011. Calcolare a quanto ammonta l'inflazione nel triennio 2009–2011.

42% circa