Altri Limiti Fondamentali

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ a > 1$
- $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\log^p x}{x^n} = 0 \quad \forall\, p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x^n \log^p x = 0 \quad \forall\, p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Esercizio. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^5}{2^x} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^9 \log x \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x+1)}{x^2}$$

Funzioni Continue

Continuità in un punto: una funzione f si dice *continua* in un punto x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

cioè,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\,.$$

Continuità in un intervallo: una funzione f è *continua* in un intervallo $[a, b]$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \;\; \forall\, x_0 \in (a, b), \;\; \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

GRAFICAMENTE: una funzione definita su un intervallo è *continua* se è possibile disegnarne il grafico con un tratto *continuo*, senza staccare la penna dal foglio.

Funzioni Continue – Operazioni

SOMMA, PRODOTTO, QUOZIENTE

Dalle proprietà delle operazioni sui limiti segue che la somma, il prodotto e il quoziente di funzioni continue sono funzioni continue.

Se f e g sono continue in x_0, cioè, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, si ha:

- $f + g$ è continua in x_0, cioè, $\lim_{x \to x_0} \big[f(x) + g(x)\big] = f(x_0) + g(x_0)$.
- $f \cdot g$ è continua in x_0, cioè, $\lim_{x \to x_0} \big[f(x)g(x)\big] = f(x_0)g(x_0)$.
- se g è diversa da zero in un intorno di x_0, $\dfrac{f}{g}$ è continua in x_0, cioè,

  $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

FUNZIONE INVERSA

Se f è continua e invertibile, allora anche la *funzione inversa* f^{-1} è continua.

Funzioni Continue – Esempi

Le seguenti funzioni sono *continue* nei rispettivi *campi di esistenza*:

1. la funzione valore assoluto $|x|$
2. le funzioni potenza ad esponente reale x^b
3. i polinomi $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$
4. le funzioni razionali *(quozienti di due polinomi)*
5. le funzioni esponenziali a^x e le loro inverse (le funzioni logaritmiche $\log_a x$)
6. le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e le loro inverse
7. ...

Esempio

Calcolare $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1}$.

La funzione $f(x) = \frac{3x^3+x^2+1}{x-1}$ è una funzione razionale fratta, quindi è continua in tutti i punti dove è definita, cioè in $\mathbb{R} - \{1\}$. Pertanto

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1} = \frac{3 \cdot 2^3 + 2^2 + 1}{2 - 1} = 29\,.$$

Attenzione: NON usare la regola dei termini di grado massimo! Tale regola vale solo per il limite di una funzione razionale fratta quando $x \to +\infty$ o quando $x \to -\infty$!

Limite di Funzione Composta

Siano f e g due funzioni per cui abbia senso $f \circ g$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

e che f sia continua in L. Allora si ha che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

Esempi: (1) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{4x+1}{x}} = \sqrt{4} = 2$

Continuità della Funzione Composta

Supponiamo che:

- g continua in x_0, cioè, $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$
- f continua in $y_0 = g(x_0)$, cioè, $\lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$

Allora $f \circ g$ è continua in x_0, cioè,

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

Esempi: le funzioni $f_1(x) = \sqrt[3]{7 + e^x}$, $f_2(x) = \log_{10}(9 + e^{1-x})$ sono continue dove sono definite. Pertanto, ad esempio,

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{7 + e^x} = 2\,, \qquad \lim_{x \to 1} \log_{10}(9 + e^{1-x}) = 1$$