Test d'Ipotesi – Introduzione

Uno degli scopi più importanti di un'analisi statistica è quello di utilizzare i dati provenienti da un campione per fare *inferenza* sulla popolazione da cui è stato estratto il campione.

Si è visto come, utilizzando la media campionaria, si può stimare il corrispondente parametro della popolazione.

Si vuole sottoporre a test un'*ipotesi* su un parametro di una popolazione, con lo scopo di decidere, esaminando un campione estratto dalla popolazione, se l'affermazione *(l'ipotesi)* riguardante il parametro è vera o falsa.

Ad esempio:

- il responsabile della produzione di un'azienda può affermare che le confezioni prodotte hanno un peso medio di 250 g
- un medico può ipotizzare che un farmaco sia efficace nel 90% dei casi in cui viene somministrato
- uno studente può credere che sia difficile superare l'esame di matematica

Con la verifica delle ipotesi si può determinare se tali congetture sono compatibili con i dati disponibili dal campione.

Test d'Ipotesi – Esempi

Esempio 1. Si vuole verificare se le lattine di caffè, confezionate automaticamente da una ditta, contengono in media il peso dichiarato di $\mu = 250\,\mathrm{g}$.

A tale scopo si prende un campione di 50 *lattine, se ne pesa il contenuto e si calcola il peso medio, per stabilire se il peso medio del campione differisce da* 250 *g.*

Esempio 2. Si vuole sottoporre a test l'affermazione di un produttore di vernici secondo cui il tempo medio di asciugatura di una nuova vernice è non superiore a 30 minuti.

A tale scopo si prende un campione di 40 *lattine di vernice, si effettuano* 40 *prove di verniciatura con la vernice delle diverse confezioni e si calcola il tempo medio di asciugatura. L'intenzione è rifiutare l'affermazione del produttore se la media osservata supera il valore di* 30 *minuti, o accettarla in caso contrario.*

Test d'Ipotesi – Definizioni

Un'ipotesi formulata in termini di parametri di una popolazione, come media o varianza, è detta **ipotesi statistica**.

Il procedimento che consente di rigettare o accettare un'ipotesi statistica, utilizzando i dati di un campione abbastanza numeroso, viene chiamato **test d'ipotesi**.

Le possibili conclusioni di un test d'ipotesi sono:

- l'ipotesi statistica è rifiutata
- l'ipotesi statistica non è rifiutata

Test d'Ipotesi – Ipotesi Zero

La distribuzione gaussiana delle medie consente anche di sottoporre ad esame critico ipotesi effettuate su una popolazione.

1. Supponiamo venga fatta un'affermazione che localizza la media μ della popolazione (ipotesi zero).
2. Per verificare l'attendibilità dell'ipotesi, si seleziona un campione casuale sufficientemente grande ($n > 30$) di cui si calcola la media campionaria $\overline{x}$ e la deviazione standard campionaria s.
3. Si misura la distanza, in termini di deviazioni standard, di μ dalla media osservata "sul campo" $\overline{x}$.
4. Quanto più $\overline{x}$ si allontana da μ, tanto più diventiamo sospettosi circa la validità dell'ipotesi riguardante la media e siamo condotti a rigettare l'ipotesi.

Test d'Ipotesi – Livello di Significatività

Così facendo ci assumiamo un rischio, cioè quello che il campione scelto avesse media $\overline{x}$ realmente molto lontana da μ e che la media μ fosse accettabile.

Il livello di rischio di prendere una decisione sbagliata, che siamo disposti a correre, dipende dalle circostanze.

Solitamente si accetta un rischio dell'1% o del 5%. Il rischio di prendere la decisione sbagliata sulla scorta dei dati del campione è detto livello di significatività del test.

Test d'Ipotesi – Esempi

Esempio 1. È stato affermato che il peso medio degli individui adulti di una certa nazione è $\mu = 68.5$ kg. Volendo sottoporre questa ipotesi a verifica, si considera un campione casuale di 625 individui che vengono pesati. Si ottiene un valor medio campionario $\overline{x} = 69.1$ kg con una deviazione standard campionaria $s = 7$ kg.

Con livello di significatività del 5%, qual è l'esito del test?

Test d'Ipotesi – Esempi

Misuriamo la distanza $\overline{x} - \mu = 0.6\,\mathrm{kg}$ della media campionaria dalla stima di μ, contenuta nell'ipotesi zero, in termini di deviazioni standard. Poiché

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \simeq \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{7}{25},$$

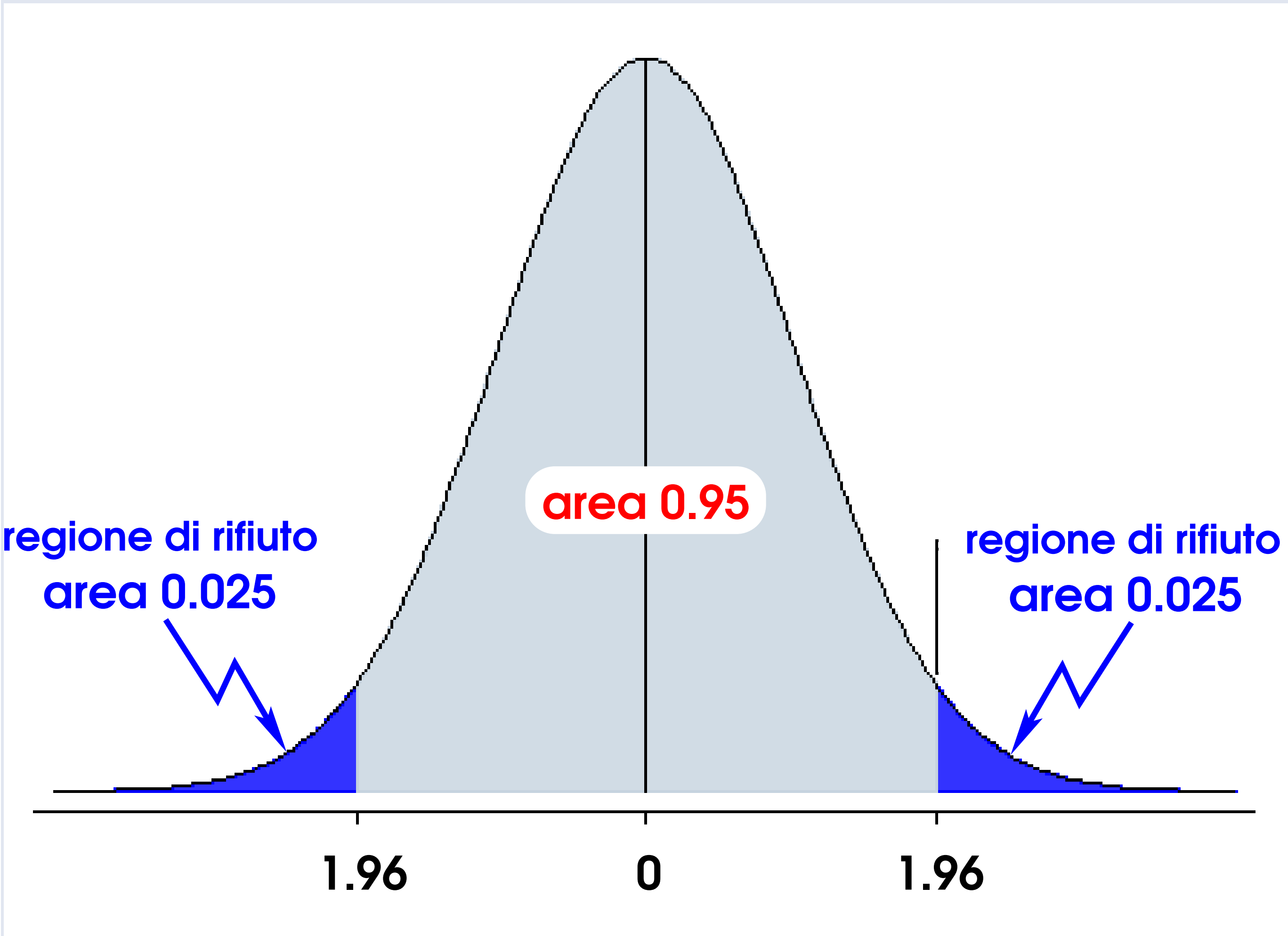
il numero u di deviazioni standard di cui $\overline{x}$ si allontana da μ soddisfa la relazione

$$u\,\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{7}{25}\,u = 0.6 \quad \Rightarrow \quad u = 2.14\,.$$

Il 95% delle medie campionarie cade nell'intervallo $\left[\mu - 1.96\,\frac{s}{\sqrt{n}}\,,\,\mu + 1.96\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$.

La media campionaria analizzata cade fuori da questo intervallo (poiché $2.14 > 1.96$). Siamo quindi autorizzati a rigettare l'ipotesi su μ, assumendoci un rischio del 5%.

Test a Due Code



Test d'Ipotesi – Esempi

Con livello di significatività dell'1%*, qual è l'esito del test?*

Se siamo disposti ad assumerci solo l'1% di rischio di prendere la decisione sbagliata, l'esito del test è diverso.

Il 99% delle medie campionarie cade nell'intervallo

$$\left[\mu - 2.58\,\frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \mu + 2.58\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

La media campionaria $\overline{x}$ appartiene a questo intervallo (poiché $2.14 < 2.58$). L'ipotesi su μ è quindi compatibile con il risultato ottenuto dal campione casuale, con un livello di significatività dell'1%.

Test d'Ipotesi – Esempi

Esempio 2. Una compagnia aerea afferma che il peso medio del bagaglio dei passeggeri dei suoi voli di linea è $\mu = 19.8\,\text{kg}$.

Per sottoporre a verifica tale ipotesi si considera un campione casuale di 324 passeggeri. Si ottiene un peso medio campionario $\overline{x} = 20.3\,\text{kg}$, con scarto quadratico medio campionario $s = 3.6\,\text{kg}$.

Con livello di significatività dell'1%*, qual è l'esito del test?*

Test d'Ipotesi – Esempi

Si ha $\dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{3.6}{18} = 0.2$, da cui

$$\overline{x} - \mu = u\,\frac{s}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad 0.5 = 0.2 \cdot u \quad \Rightarrow \quad u = 2.5\,.$$

La media campionaria dista, da quella contenuta nell'ipotesi zero, 2.5 scarti quadratici medi e dunque è ancora interna all'intervallo

$$\left[\mu - 2.58\frac{s}{\sqrt{n}}\,,\, \mu + 2.58\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \qquad (\text{poiché } 2.50 < 2.58)$$

entro cui cade il 99% dei dati.

L'esito del test è: non esistono elementi sufficienti per rigettare l'ipotesi su μ, al livello di significatività richiesto.

Test d'Ipotesi – Esempi

Se i valori di $\overline{x}$ e s sono ottenuti da un campione di 400 *passeggeri, come cambia l'esito del test?*

Se il campione è formato da 400 passeggeri: $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{3.6}{20} = 0.18$ che corrisponde a una distanza tra $\overline{x}$ e μ pari a 2.78 scarti quadratici medi.

Dunque, $\overline{x}$ cade fuori dall'intervallo

$$\left[\mu - 2.58\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \, \mu + 2.58\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \qquad \text{(poiché } 2.78 > 2.58\text{)}$$

La conclusione del test è: rigettiamo l'ipotesi formulata su μ, con un margine di rischio dell'1%.

L'esempio mostra il ruolo della grandezza del campione nell'esito del test.

Test d'Ipotesi – Errori

Se l'ipotesi zero è vera, ma erroneamente viene rigettata, si commette un errore di primo tipo.

Se l'ipotesi zero è falsa, ma erroneamente non viene rigettata, si commette un errore di secondo tipo.