ANALISI 2 — Tema d'esame del 17 novembre 2000

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** gli esercizi svolti.

1. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, dimostrare che la seguente equazione inegrale

$$y(x) = \alpha + \int_0^x (1 + y(t)) \sin t \, dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ammette una e una sola soluzione $y_a \in C^1(\mathbb{R})$. Trovare inoltre esplicitamente $y_1(x)$.

2. Determinare $g \in C^1(\mathbb{R})$ in modo tale che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{y^2 - g(x)}{(x^2 + y^2)^2} \, dx - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \, dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

3. Studiare massimi e minimi della funzione $F : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F(x, y) = y \left(\int_0^{x^2} e^{-t^2} \, dt + y \right).$$

4. Discutere la regolarità (fino alla differenziabilità) della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ xye^{xy} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

5. Posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq -1/2\}$ e $f(x, y) = 4xy$ si determinino il massimo e il minimo assoluti di f in D e i punti dove essi sono assunti.