ANALISI 2 — Tema d'esame del 26 maggio 2000

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti.

1. Si consideri sull'intervallo $[0, \pi]$ la funzione $f(x) = e^x$, estesa poi a $[-\pi, \pi]$ in modo pari, ed infine a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità. Si calcolino i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier e si calcoli, giustificando i passaggi, la somma della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+4k^2}.$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2y}{1+x^2};$$

se ne calcolino, se esistono, le soluzioni il cui grafico risulta tangente oppure ortogonale al grafico di $y = e^x$.

3. Dato $a > 0$ si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^6/(|x|^{6a} + |y|^{6a}) & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si determinino i valori del parametro a per cui f sia:

a) Continua in $\mathbb{R}^2$

b) Differenziabile in $\mathbb{R}^2$

4. Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 \leq z \leq 5 - 3x^2 - 2y^2\}$. Si calcoli il flusso uscente da A del campo

$$F(x, y, z) = (\sqrt{y^2 + z^2 + 1} - xy^2, y \sin z, \cos z - x^2 z)$$

5. Data la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x\right) dy$$

definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, se ne calcoli l'integrale lungo il ramo di parabola $\{y = x^2 - 1, y \leq 0\}$ secondo il verso delle ascisse crescenti.