Corso di Laurea in Scienze Biologiche

Esercizi sui limiti di funzioni

1) Calcolare i seguenti limiti di funzioni continue

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}}{x^2+3x+2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{\log_2(x+1/2)}, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x)(x^2+1)}{x^2+2},$$

$\frac{1}{2}, -1, -\frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 1} 2x^2\big(\sin(x-1)+2\cos(x^2-1)\big), \qquad \lim_{x\to -1}\frac{e^{\frac{x^2-2}{2x^2-3}}}{e^{\frac{x+2}{3-2x^2}}}.$$

$4, 1$

2) Calcolare i seguenti limiti dei tipi L/∞, $L/0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^3}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{22}{xe^x}, \qquad \lim_{x\to \pi/4}\frac{x^{10}}{\tan x - 1}, \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{(x-2)^2},$$

$\nexists, 0, \nexists, +\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^{1/x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\sin(x^3)}, \qquad \lim_{x\to \pi/2}\frac{x}{\tan x}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\arctan x}{e^{x^2+3}},$$

$0, \nexists, \nexists, 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x-3|}{x^2+x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\cos x)}{\sin(\sin x)}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\log(x+1)}{\arctan x + 2}.$$

$\nexists, \nexists, +\infty$

VEDI 2° FOGLIO

3) Calcolare i seguenti limiti utilizzando le formule sul limite della funzione composta:

$$\lim_{x\to \pi/2} e^{-\tan x}, \qquad \lim_{x\to \pi}\exp(1/\sin x), \qquad \lim_{x\to 2}\exp(1/(x-2)^5), \qquad \lim_{x\to -1^+}\log(-\log(x+1)),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)}{e^{1/x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0}\exp(-\log(x^2)), \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sin e^x}{x}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\arctan(e^{x^2}).$$

4) Calcolare i seguenti limiti (forme indeterminate):

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{\exp(2x^2-3)}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\log(\log x)}{x-10}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x+1}{3x^3+3}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^5-15}{5x^2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1/x^2+1/x}{1/x^3+1/x^2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\exp(1/x)}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^4-4x+2}{x^4+4x-2}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\arctan\left(\frac{x\log^2 x}{e^x}\right),$$

(gli esercizi che seguono sono più difficili)

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x^2}+5x+4}{e^{x+1}-x-2}, \qquad \lim_{x\to \pi/2}\frac{x-\pi/2}{\tan x}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\log^2 x+\log x}{2\log^3 x+\log^2 x}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\log(x+1)}{\log x},$$

(qui è richiesta la conoscenza di alcuni limiti fondamentali)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(3x^2+1)}{2x\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{1-\cos^2 x}, \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sin(x-2)}.$$

3) $\lim_{x\to \pi/2} e^{-\tan x} \nexists$

$\lim_{x\to \pi} e^{\frac{1}{\sin x}} \nexists$

$\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{(x-2)^5}} \nexists$

limiti destri e sinistri sono $+\infty$ e $-\infty$ ... quindi sono tutti punti di infinito senza il limite.

$\lim_{x\to -1^+} \log(-\log(x+1)) = \log(+\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)}{e^{1/x^2}} = \frac{1}{e^{1/0^+}} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$

$\lim_{x\to 0} e^{-\log x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin e^x}{x}$ $\cdot$(limitata $*$ infinit) $= 0$

$\lim_{x\to +\infty} \arctan(e^{x^2}) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^{2x^2-3}} = 0$ esponentiale e' un infinito piu' forte delle potente.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(\log x)}{x-10} = 0$ potenta di x ~~[illegible]~~ e' piu' forte del logaritmo

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x+1}{3x^3+1} = 0$ denominatore + forte

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^5-15}{5x^2} = +\infty$ numeratore + forte

$\lim_{x\to 0} \frac{1/x^2 + 1/x}{1/x^3 + 1/x^2} \overset{y=1/x}{\Rightarrow} \lim_{y\to \pm\infty} \frac{y^2+y}{y^3+y^2} = 0$ sia $y\to+\infty$ che $y\to-\infty$.

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{1/x}} \overset{y=1/x}{\Rightarrow} \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{ye^y}$ sono diversi $\nexists$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^4-4x+2}{x^4+4x-2} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{atan}\left(\frac{x\log^2 x}{e^x}\right) = \operatorname{atan}(0) = 0$

5) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}+5x+4}{e^{x+1}-x-2} \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{x-\pi/2}{\tan x} = \frac{0}{\pm\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x+\log x}{2\log^3 x+\log^2 x} = 0$$ il denominatore vince.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)}{\log(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^3} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y\cdot y^{1/2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(3x^2+1)}{2x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(3x^2+1)}{2x^2} \cdot \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{3}{2}$$

(per esempio, porre $y = 3x^2$ $x\to 0 \Rightarrow y\to 0$ e ricondursi al limite fondamentale $\frac{\log(1+y)}{y}$).

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{\sin^2 x} = 0 \quad \left(\frac{\sin x}{x}\to 1\right)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sin(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{\sin(x-2)} = 4.$$