in quanto da (5.46) si ha che r_{k+1} è ortogonale a $\text{span}(p_0, p_1, \ldots, p_k)$. Allora, si ha $c_{k+1} \neq 0$ e si può scrivere:

$$A^{k+1} r_0 = \frac{1}{c_{k+1}} \left(r_{k+1} - \sum_{i=0}^{k} c_i A^i r_0 \right)$$

e in base all'ipotesi di ricorrenza: $\sum_{i=0}^{k} c_i A^i r_0 \in \text{span}(r_0, r_1, \ldots, r_k)$. Pertanto: $A^{k+1} r_0 \in \text{span}(r_0, r_1, \ldots, r_{k+1})$ e in definitiva:

$$\text{span}(r_0, r_1, \ldots, r_{k+1}) = \text{span}(r_0, A r_0, \ldots, A^{k+1} r_0)$$

In maniera del tutto analoga, si dimostra, utilizzando la relazione $p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$, che:

$$\text{span}(p_0, p_1, \ldots, p_{k+1}) = \text{span}(r_0, A r_0, \ldots, A^{k+1} r_0)$$

Dimostriamo infine che $(A p_{k+1}, p_i) = 0$ per $i \leq k$, mentre lasciamo come semplice esercizio l'ultima proprietà $(r_{k+1}, r_k) = 0$. Per $i = k$ è ovvia. Per $i \leq k - 1$, si ha:

$$(p_{k+1}, A p_i) = (r_{k+1}, A p_i) + \beta_{k+1} (p_k, A p_i)$$

Per l'ipotesi di ricorrenza: $(p_k, A p_i) = 0$; d'altra parte si ha:

$$A p_i \in \text{span}(r_0, A r_0, \ldots, A^{i+1} r_0) = \text{span}(p_0, p_1, \ldots, p_{i+1})$$

e quindi da (5.46) si ha $(r_{k+1}, p_{i+1}) = 0$, da cui $(r_{k+1}, A p_i) = 0$ e pertanto, in definitiva $(p_{k+1}, A p_i) = 0$. ■