Corso di Geometria 2 - a.a. 2012-2013
Prova scritta del 12-07-2013

Esercizio 1
Sia $\alpha\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\alpha(t) = (2t, t^2, \log t)$.

1. Dimostrare che α è una curva biregolare.
2. Indicando con κ e τ la curvatura e la torsione di α, dimostrare che $\kappa(t) = |\tau(t)|$ per ogni $t > 0$.
3. Indicando con $\mathbf{n}$ il versore normale di α, dimostrare che esiste un piano P passante per l'origine tale che $\mathbf{n}(t) \in P$ per ogni $t > 0$.

Esercizio 2
Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0,\ xy - z^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

1. Dimostrare che S è una superficie regolare orientabile di classe C^∞.
2. Determinare la natura dei punti di S.
3. Dire se S contiene punti ombelicali.
4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (x, y, -z)$. Mostrare che la restrizione di F ad S è un'isometria di S.
5. Stabilire se S è una superficie rigata.

Esercizio 3
Per $a > r > 0$, sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare orientata (con orientazione uscente) espressa in forma Cartesiana da

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2.$$

Siano $X \subset S$ e $Y \subset S$ le regioni dove la curvatura Gaussiana K è positiva, rispettivamente negativa.

a) Si descriva il complementare $S \setminus \{X \cup Y\}$. Che tipo di curve sono le sue componenti connesse?

b) Si calcolino gli integrali

$$\int_X K dS, \quad \int_Y K dS.$$

c) Determinare il gruppo fondamentale di X, Y e S.