Corso di Geometria 2 - a.a. 2012-2013

Prova scritta del 25-02-2014

Esercizio 1

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie parametrica di equazioni:

$$\mathbf{x}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v), \qquad (u,v) \in U,$$

dove $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ v > 0\}$.

1. Verificare che S è il grafico di una funzione differenziabile.
2. Calcolare curvatura Gaussiana e curvatura media nel punto generico $P = \mathbf{x}(u,v)$.
3. Si consideri la funzione $f\colon S \to \mathbb{R}$ tale che $f(x,y,z) = \frac{y-x}{z^2}$.
   (a) Verificare che f è differenziabile.
   (b) Sia $Q = (1,0,1) \in S$, determinare la matrice rappresentativa del differenziale $df_Q\colon T_Q(S) \to \mathbb{R}$ nella base indotta dalla parametrizzazione $\mathbf{x}$ nel punto Q.
   (c) Trovare una curva regolare su S passante per Q ed avente come vettore tangente un vettore di $\ker df_Q$.

Esercizio 2

Indicando con J il segmento di $\mathbb{R}^3$ avente come estremi i punti $P_1 = (0,0,1)$ e $P_2 = (0,0,-1)$, sia $X = S^2 \cup J$.

1. Dimostrare che $X \setminus \{P\}$ è omotopicamente equivalente a J se $P = P_1$ o $P = P_2$.
2. Dimostrare che $X \setminus \{P\}$ è semplicemente connesso se $P \in J$ e $P \neq P_1, P_2$.
3. Dimostrare che $X \setminus \{P\}$ non è semplicemente connesso se $P \in S^2$ e $P \neq P_1, P_2$.

Esercizio 3

Si considerino le applicazioni $\theta_i\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $i = 1,2$, date da

$$\theta_1(t,(x,y)) = (x\cos t + y\sin t, -x\sin t + y\cos t), \qquad \theta_2(t,(x,y)) = (x + ty, y).$$

1. Mostrare che θ_i, $i = 1,2$, sono di classe C^∞ e che per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $s,t \in \mathbb{R}$ si ha
$$\theta_i(0,(x,y)) = (x,y), \qquad \theta_i(s,\theta_i(t,(x,y))) = \theta_i(s+t,(x,y)).$$
2. Per $i = 1,2$ e $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, descrivere $O(x,y) = \{\theta_i(t,(x,y)) \,:\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Nei casi in cui $O(x,y)$ è il supporto di una curva regolare, mostrare che il vettore $\frac{d}{dt}\theta_i(t,(x,y))$ è tangente a $O(x,y)$.
3. Trovare coordinate (p,q) sull'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \,:\, x \leq 0,\ y = 0\}$ tali che θ_1 scritta nelle coordinate (p,q) assuma la forma $\widehat{\theta}_1(t,(p,q)) = (p+t,q)$ (per $|t|$ sufficientemente piccolo in funzione di (p,q)).
4. Trovare coordinate (p,q) sull'aperto $\{(x,y) \,:\, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ tali che θ_2 scritta nelle coordinate (p,q) assuma la forma $\widehat{\theta}_2(t,(p,q)) = (p+t,q)$.