CORSO DI GEOMETRIA B

Appello del 23 febbraio 2007

Esercizio 1
Si consideri la seguente curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$:

$$\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, \frac{1}{2}\log t),\ \ t > 0.$$

(1) Verificare che γ è una curva regolare C^∞.
(2) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra $t = 1$ e $t = 2$.
(3) Determinare curvatura e torsione di γ nel punto $\gamma(2\pi)$.
(4) Determinare il piano osculatore nel punto $\gamma(2\pi)$.
(5) Dire se la curva è piana.

Esercizio 2
Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie S parametrizzata da

$$\underline{x} : \mathbb{R}^2 \to S,$$
$$\underline{x}(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u).$$

(1) Verificare che S è una superficie regolare orientabile di classe C^∞.
(2) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S nel punto $\underline{x}(u, v)$.
(3) Determinare la natura dei punti di S al variare di (u, v).
(4) Sia $\alpha \subset \mathbb{R}^3$: $\alpha(t) = (t, 0, t^3)$, $t > 0$. Mostrare che α è una curva regolare contenuta in S.
(5) Determinare le direzioni principali di curvatura nei punti $\alpha(t)$.
(6) Calcolare la curvatura normale di α.
(7) Dire se α è una geodetica.

Esercizio 3
Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano, si consideri la conica C di equazione:

$$y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_1y_2 - y_2 + 1 = 0.$$

(1) Riconoscere la conica.
(2) Determinare la forma canonica euclidea della conica C.
(3) Trovare la chiusura proiettiva della conica e i punti impropri.