CORSO DI GEOMETRIA B

Appello del 14 gennaio 2008

Esercizio 1
Si consideri la seguente curva $\gamma : \{t \in \mathbb{R} \,|t > 0\} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \log t)$.

(1) Verificare che γ è una curva regolare C^∞.
(2) Determinare curvatura e torsione di γ.
(3) Determinare il triedro di Frenet nel punto $\gamma(\pi)$.
(4) Dire se la curva è piana.

Esercizio 2
Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ x^2 - z^2 = 1\}$

(1) Mostrare che S è una superficie regolare orientabile di classe C^∞.
Sia $\underline{x} : \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$, $\underline{x}(u, v) = (\sqrt{1 + u^2}, v, u)$ una parametrizzazione di S.
(2) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S nel punto $\underline{x}(u, v)$.
(3) Determinare la natura dei punti di S al variare di (u, v).
(4) Determinare le linee asintotiche di S.
(5) Determinare il luogo dei punti in S in cui le curve coordinate sono linee di curvatura.

Sia $A = \mathbb{R}^3 - (\Pi_1 \cup \Pi_2)$, dove $\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x - 1\}$, $\Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -(x - 1)\}$. Sia $\phi : A \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi(x, y, z) = (\frac{(x-1)^2 + z^2}{z^2 - (x-1)^2}, y, \frac{2z(x-1)}{z^2 - (x-1)^2}).$$

Sia $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 2)^2 + z^2 = 1\}$ e sia

$$\underline{y} : U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi/2 < u < \pi, v \in \mathbb{R}\} \to \mathcal{C}$$

$$\underline{y}(u, v) = (2 + \cos u, v, \sin u),$$

una parametrizzazione del cilindro $\mathcal{C}$ e sia $V = \underline{y}(U) \subset \mathcal{C}$.

(6) Mostrare che $\phi(V) \subset S$.
(7) Mostrare che la restrizione di ϕ a V, $\phi_{|V} : V \to S$ è un diffeomorfismo locale in ogni punto di V.
(8) Dire se $\phi_{|V}$ è un'isometria locale.

Esercizio 3 Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano, si consideri la conica C di equazione:

$$-10y_1^2 + \frac{1}{5}y_2^2 + 2y_1y_2 + 2y_1 - 1 = 0.$$

(1) Riconoscere la conica.
(2) Trovare la chiusura proiettiva della conica e i punti impropri.